ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

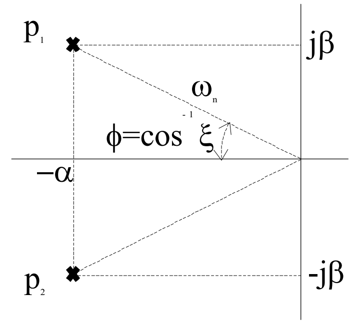
CARACTERÍSTICAS DE LA RESPUESTA TEMPORAL DE LAS FUNCIONES BICUADRÁTICAS

José M. Drake
CTR (Computadores y Tiempo Real)
Dpto. de Electrónica y Computadores

RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BAJO

$$G_{LP}(s) = \frac{K\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{K}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$



<u>Función Sobreamortiguada (ξ>1)</u>

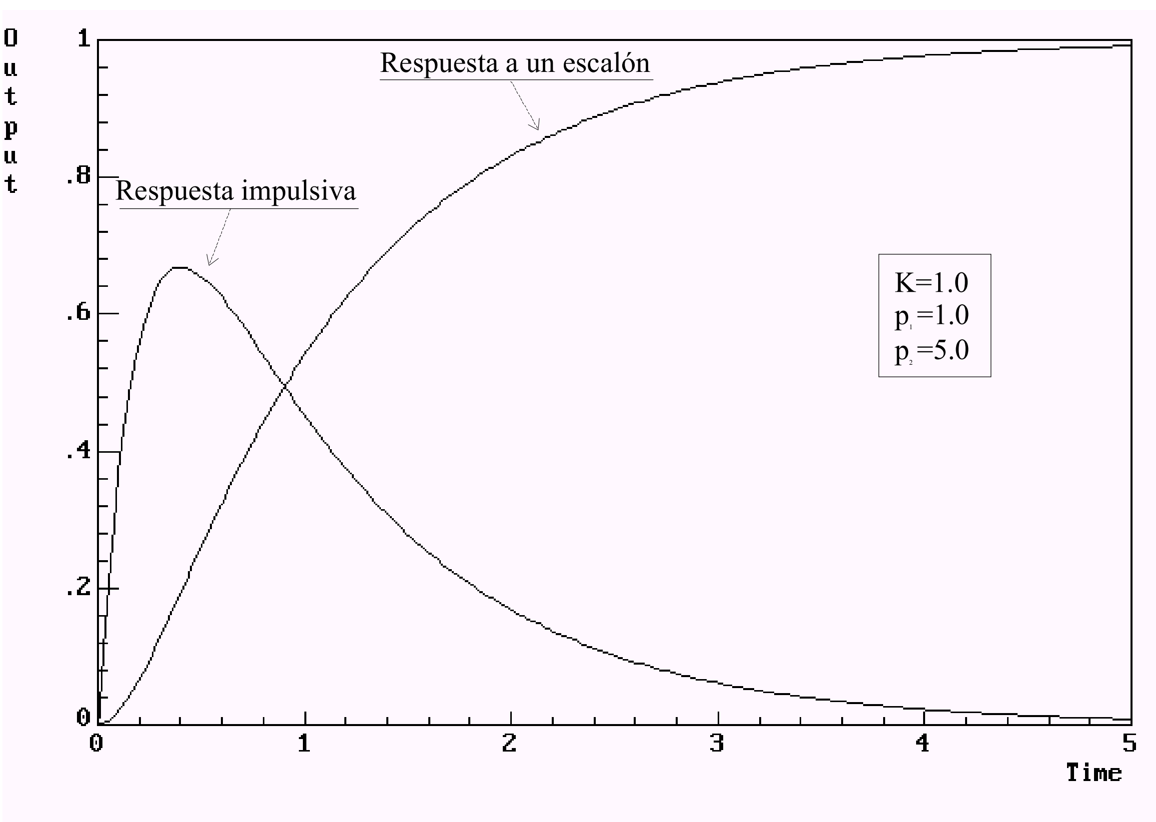
$$G_{LP}(s) = \frac{K\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{K\ p_1\ p_2}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

Respuesta Impulsiva: r(t)= δ(t)

$$c(t) = \frac{Kp_1p_2}{p_2 - p_1}\left(\varepsilon^{-p_1 t} - \varepsilon^{-p_2 t}\right)$$

Respuesta a un escalón: r(t)= u(t)

$$c(t) = K\left(1 - \frac{1}{p_2 - p_1}\left(p_2\varepsilon^{-p_1 t} - p_1\varepsilon^{-p_2 t}\right)\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BAJO

$$G_{LP}(s)=\frac{K\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right)+1}$$

<u>Función Crítica (ξ=1)</u>

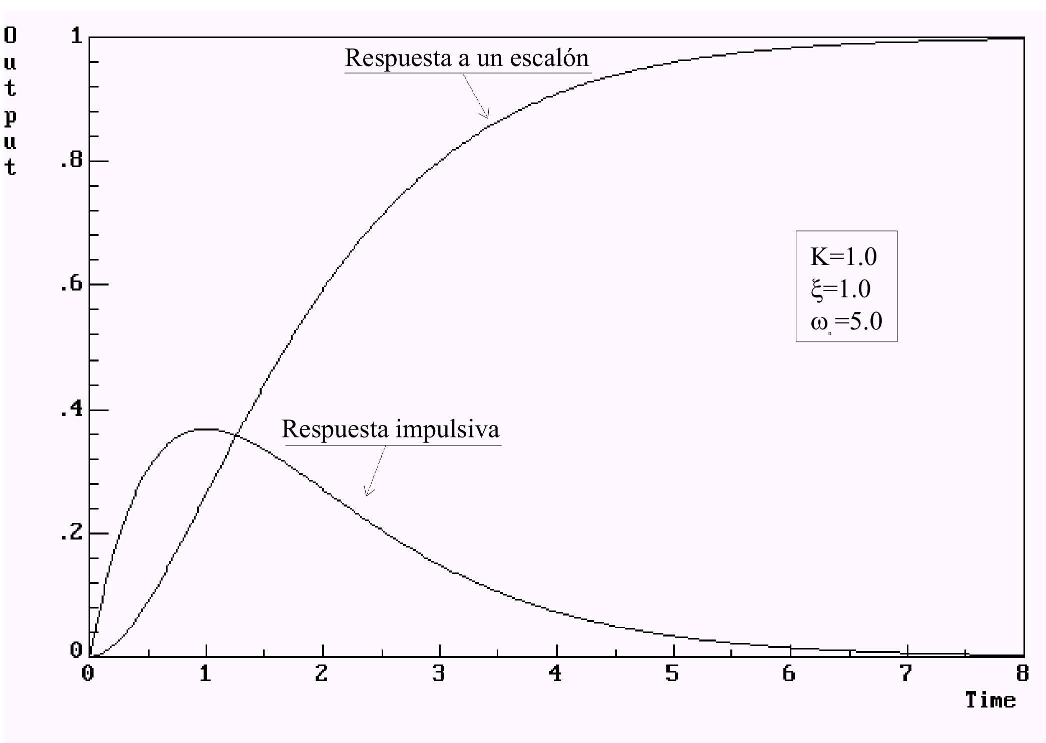
$$G_{LP}(s)=\frac{K\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K\ \omega_n^{\,2}}{(s+\omega_n)^2}$$

Respuesta Impulsiva: r(t)= δ(t)

$$c(t)=K\omega_n^{\,2}\ t\ \varepsilon^{-\omega_n t}$$

Respuesta a un escalón: r(t)= u(t)

$$c(t)=K\left(1-\varepsilon^{-\omega_n t}\left(1+\omega_n t\right)\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BAJO

$$G_{LP}(s)=\frac{K\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)+1}$$

<u>Función Subamortiguada (0<ξ<1)</u>

$$G_{LP}(s)=\frac{K\omega_n^{\,2}}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K\left(\alpha^2+\beta^2\right)}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

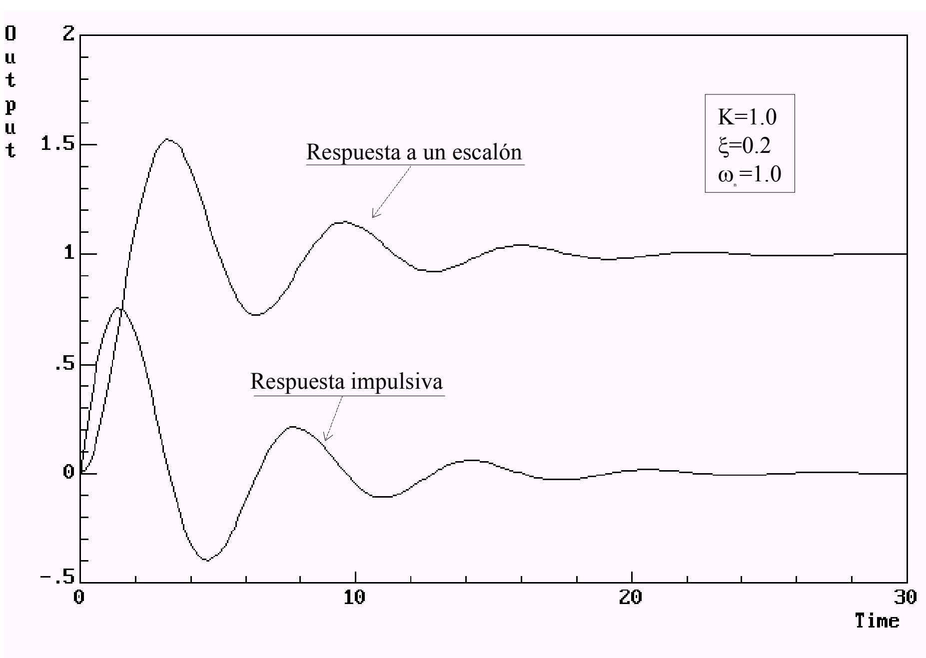
Respuesta Impulsiva: r(t)= δ(t)

$$c(t)=\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\xi\omega_n t}\,\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)=\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\alpha t}\,\sin(\beta\, t)$$

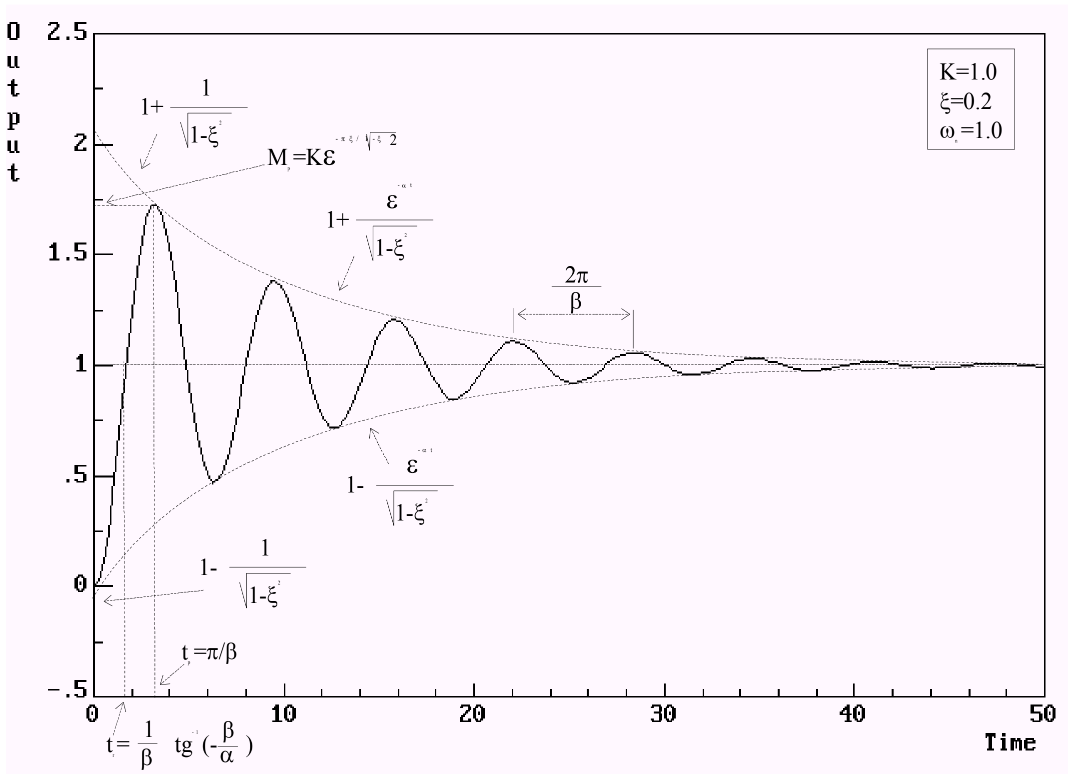
Respuesta a un escalón: r(t)= u(t)

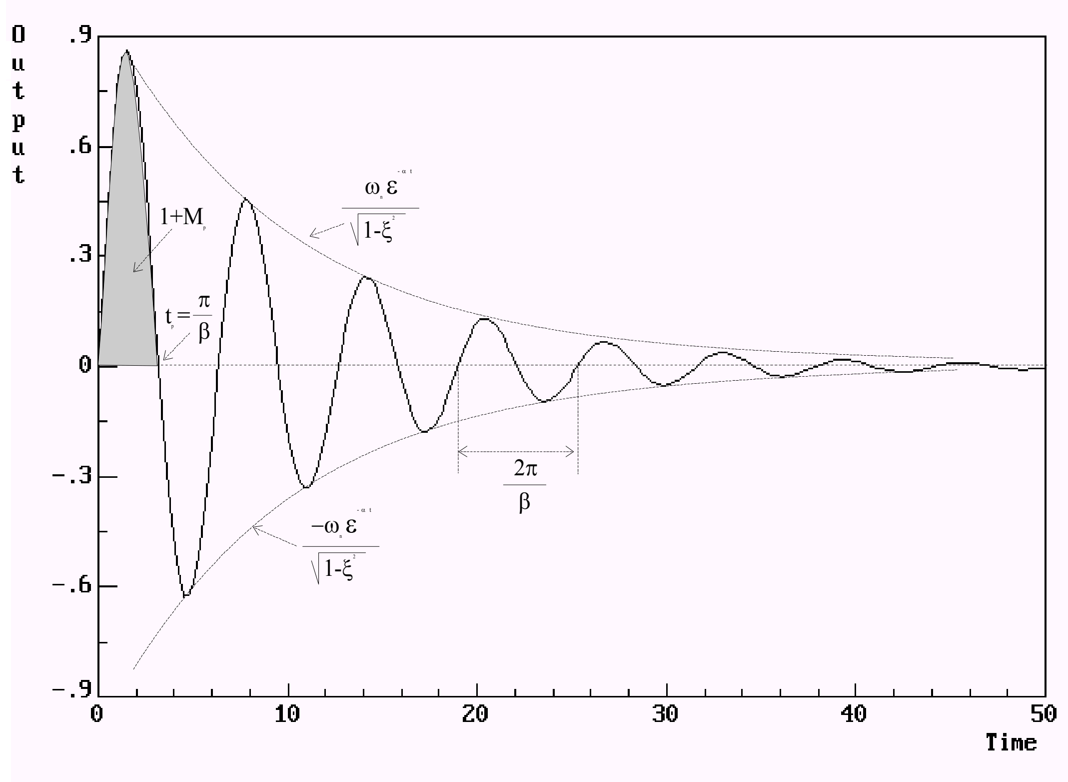
$$c(t)=K\left(1-\frac{\varepsilon^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\right)\right)=$$

$$=K\left(1-\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos(\beta\, t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\beta\, t)\right)\right)=K\left(1-\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\sin\left(\beta t+tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$



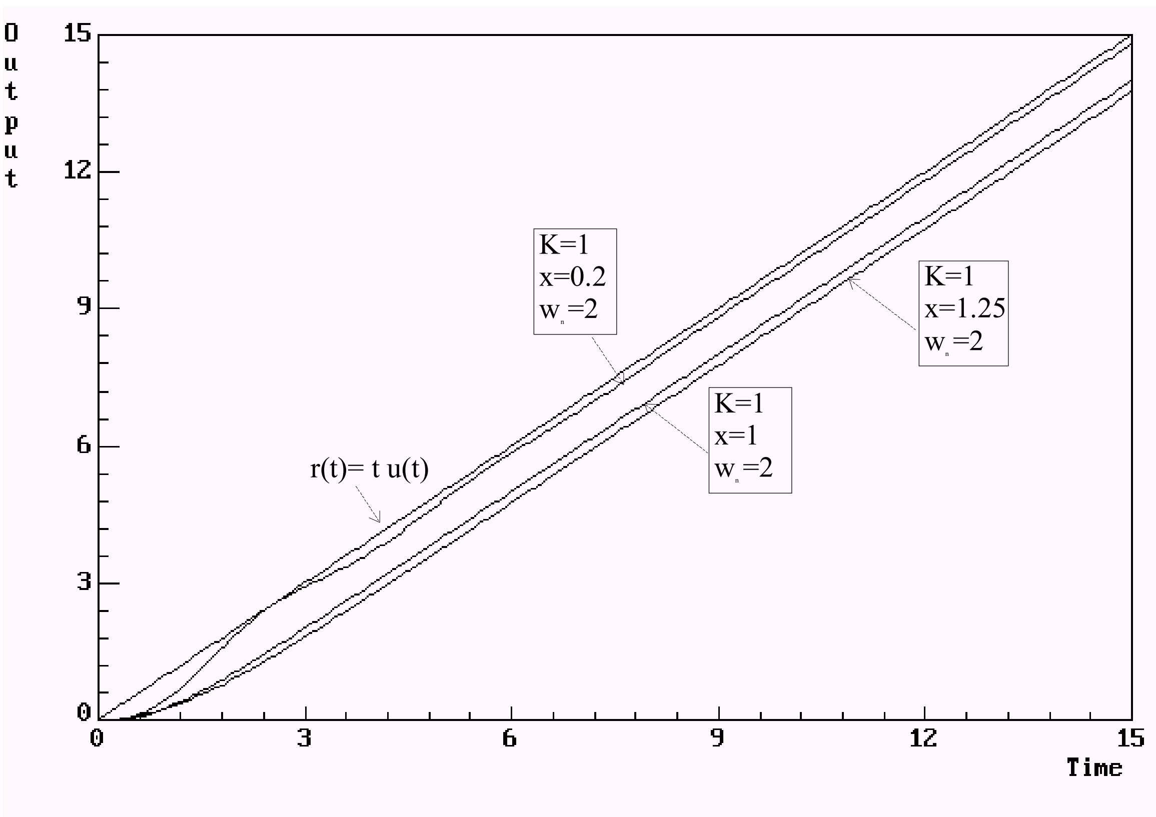
Características de la respuesta temporal del sistema subamortiguado.





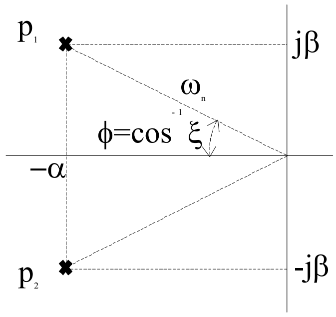
Respuesta a una rampa lineal: r(t)= t u(t)

$$c(t) = K\left[t - \frac{2\xi}{\omega_n} + \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\, t - 2\, tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right)\right)\right]$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BANDA



$$G_{LP}(s)=\frac{K\omega_n s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)+1}$$

<u>Función Sobreamortiguada (ξ>1)</u>

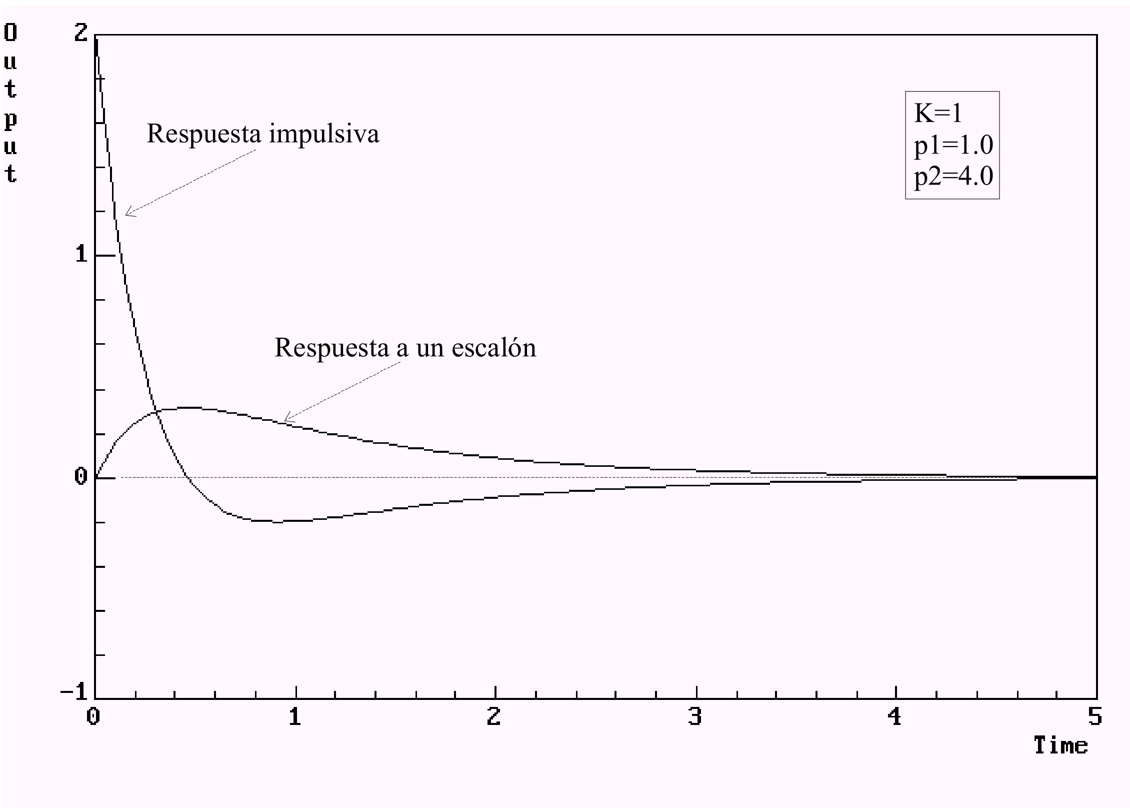
$$G_{LP}(s)=\frac{K\omega_n s}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K\sqrt{p_1p_2}\,s}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

Respuesta a un Impulsiva: r(t)= δ(t)

$$c(t)=\frac{K\sqrt{p_1p_2}}{p_2-p_1}\left(p_2\varepsilon^{-p_2t}-p_1\varepsilon^{-p_1t}\right)$$

Respuesta a un Escalón: r(t)= u(t)

$$c(t)=\frac{K\sqrt{p_1p_2}}{p_2-p_1}\left(\varepsilon^{-p_1t}-\varepsilon^{-p_2t}\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BANDA

Función Crítica (ξ=1)

$$G_{LP}(s)=\frac{Ks\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{K\,s\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

Respuesta Impulsiva: r(t)= δ(t)

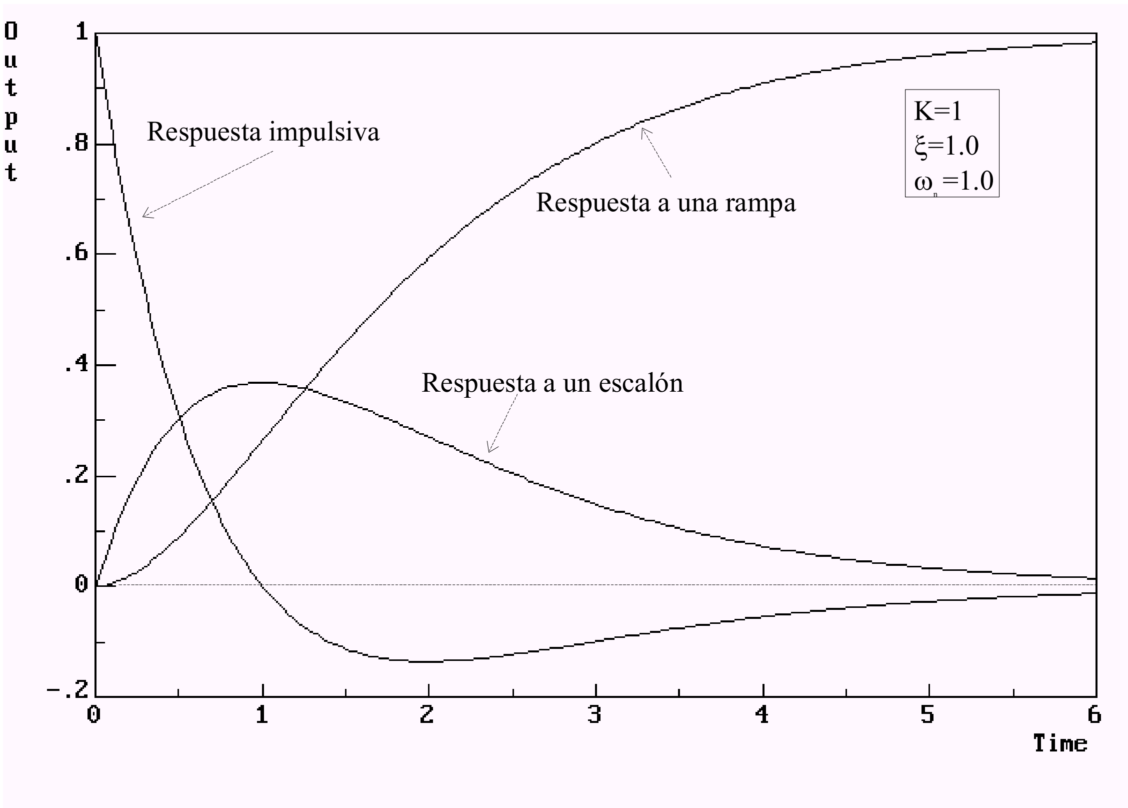
$$c(t)=K\omega_n\left(1-\omega_n t\right)\varepsilon^{-\omega_n t}$$

Respuesta a un escalón: r(t)= u(t)

$$c(t)=K\omega_n\;t\;\varepsilon^{-\omega_n t}$$

Respuesta a una rampa lineal:

$$c(t)=\frac{K}{\omega_n}\left(1-\varepsilon^{-\omega_n t}\left(1+\omega_n t\right)\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BANDA

<u>Función Subamortiguada (0<ξ<1)</u>

$$G_{LP}(s)=\frac{Ks\omega_n}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{Ks\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)}}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

Respuesta Impulsiva: r(t)= δ(t)

$$c(t)=\frac{K\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\xi\omega_n t}\,\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t+tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right)\right)$$

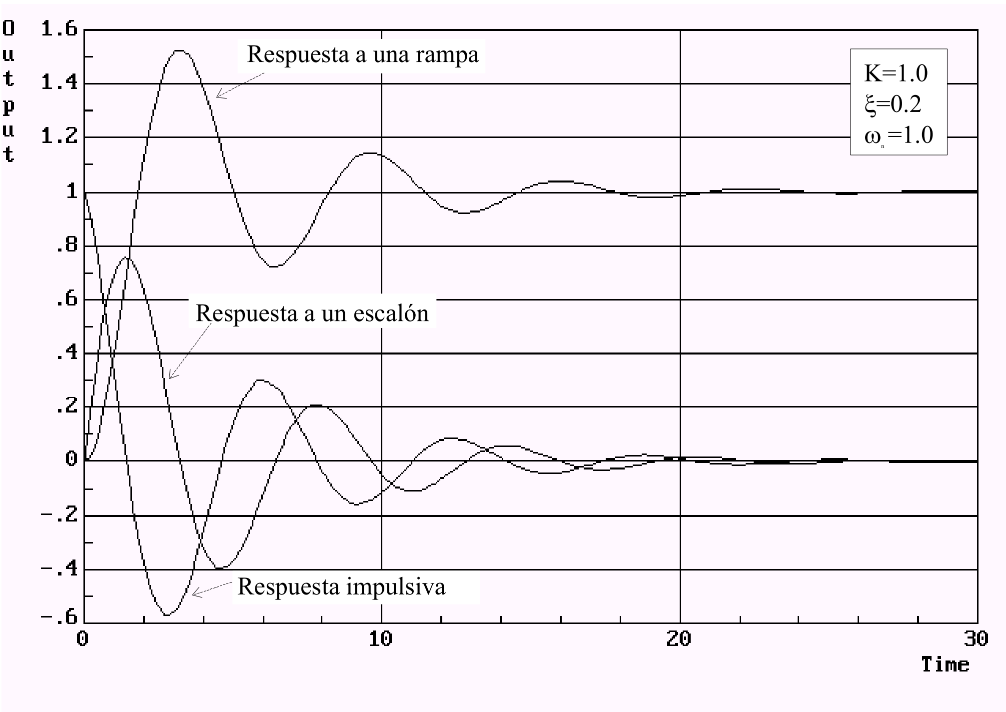
Respuesta a un escalón: r(t)= u(t)

$$c(t)=\frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\xi\omega_n t}\,\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)=\frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\alpha t}\,\sin(\beta\, t)$$

Respuesta a una rampa lineal: r(t)= t u(t)

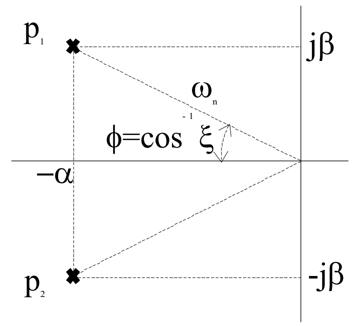
$$c(t)=\frac{K}{\omega_n}\left(1-\frac{\varepsilon^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{K}{\omega_n}\left(1-\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos(\beta\, t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\beta\, t)\right)\right)=\frac{K}{\omega_n}\left(1-\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\beta t+tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.
FUNCION DE PASO ALTO

$$G_{LP}(s)=\frac{Ks^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{K\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)+1}$$



Función Sobreamortiguada (ξ>1)

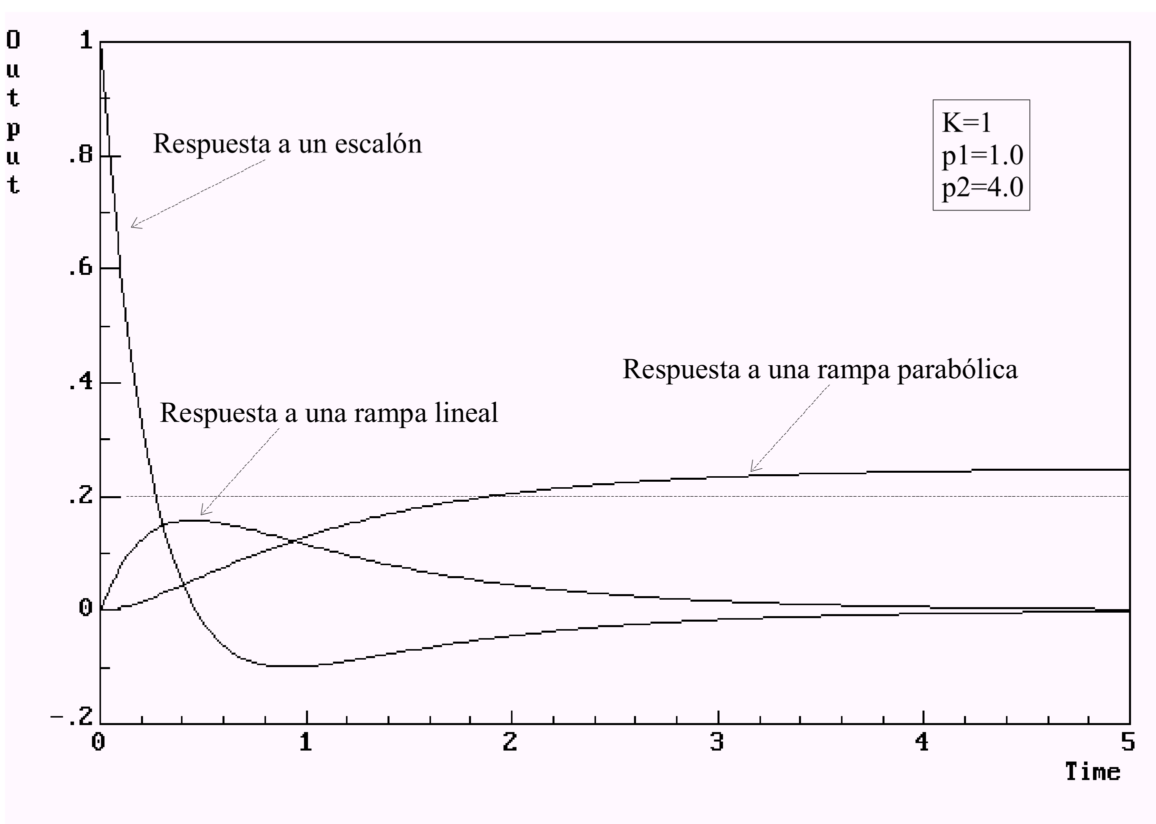
$$G_{LP}(s)=\frac{Ks^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^{\,2}}=\frac{Ks^2}{(s+p_1)(s+p_2)}$$

Respuesta a un Escalón: r(t)= u(t)

$$c(t)=\frac{K}{p_2-p_1}\left(p_2\varepsilon^{-p_2t}-p_1\varepsilon^{-p_1t}\right)$$

Respuesta a una Rampa Lineal: r(t)= t u(t)

$$c(t)=\frac{K}{p_2-p_1}\left(\varepsilon^{-p_1t}-\varepsilon^{-p_2t}\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCIÓN DE PASO ALTO

Función Crítica (ξ=1)

$$G_{LP}(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{K\ s^2}{(s+\omega_n)^2}$$

Respuesta a un Escalón: r(t)= u(t)

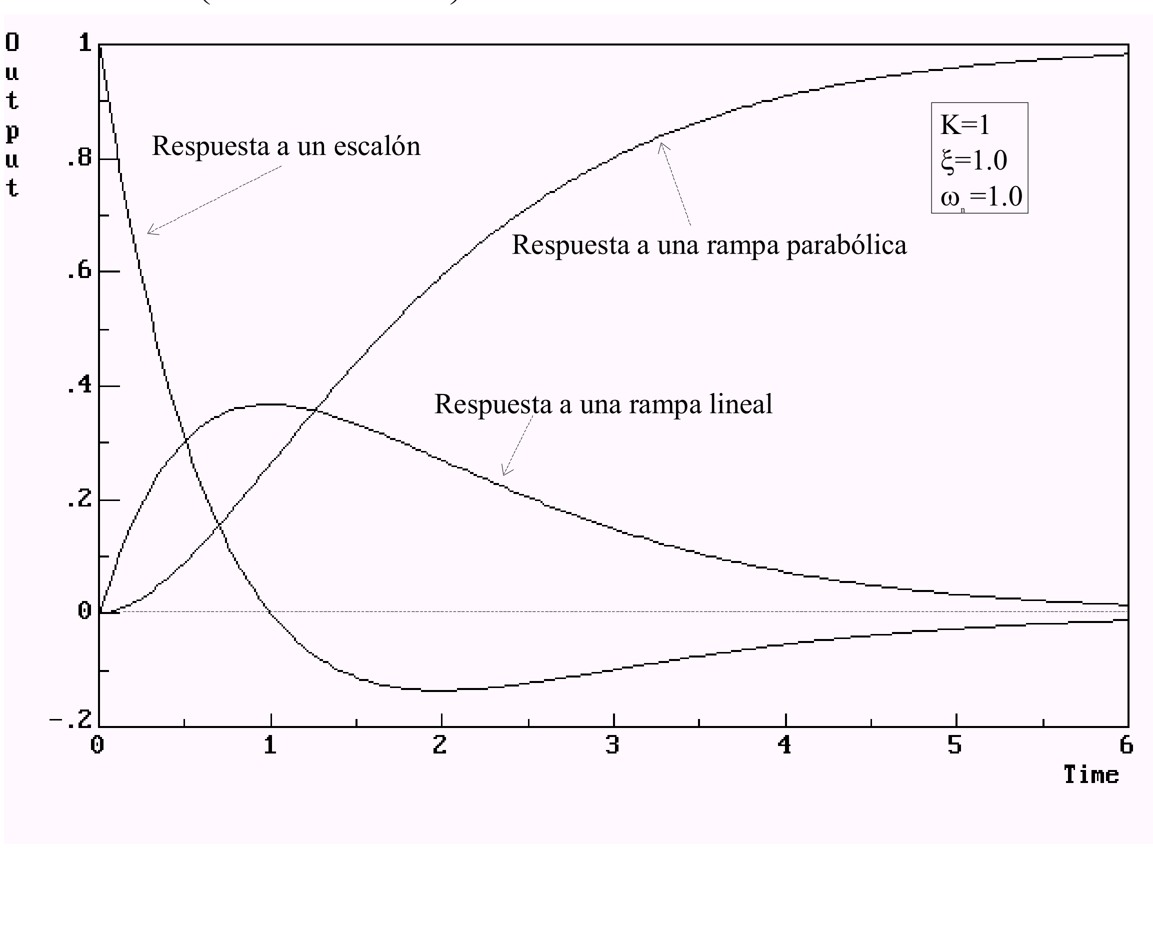
$$c(t) = K\left(1-\omega_n t\right)\varepsilon^{-\omega_n t}$$

Respuesta a una Rampa Lineal: r(t)= t u(t)

$$c(t) = K\ t\ \varepsilon^{-\omega_{n1} t}$$

Respuesta a una Rampa Parabólica: r(t)= 0.5 t^2 u(t)

$$c(t) = K\left(1-\varepsilon^{-\omega_n t}\left(1+\omega_n t\right)\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.
FUNCION DE PASO ALTO

Función Subamortiguada $(0<\xi<1)$

$$G_{LP}(s)=\frac{Ks^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{Ks^2}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$$

Respuesta a un Escalón: r(t)= u(t)

$$c(t)=\frac{K}{\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\xi\omega_n t}\,\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t+tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{-\xi}\right)\right)$$

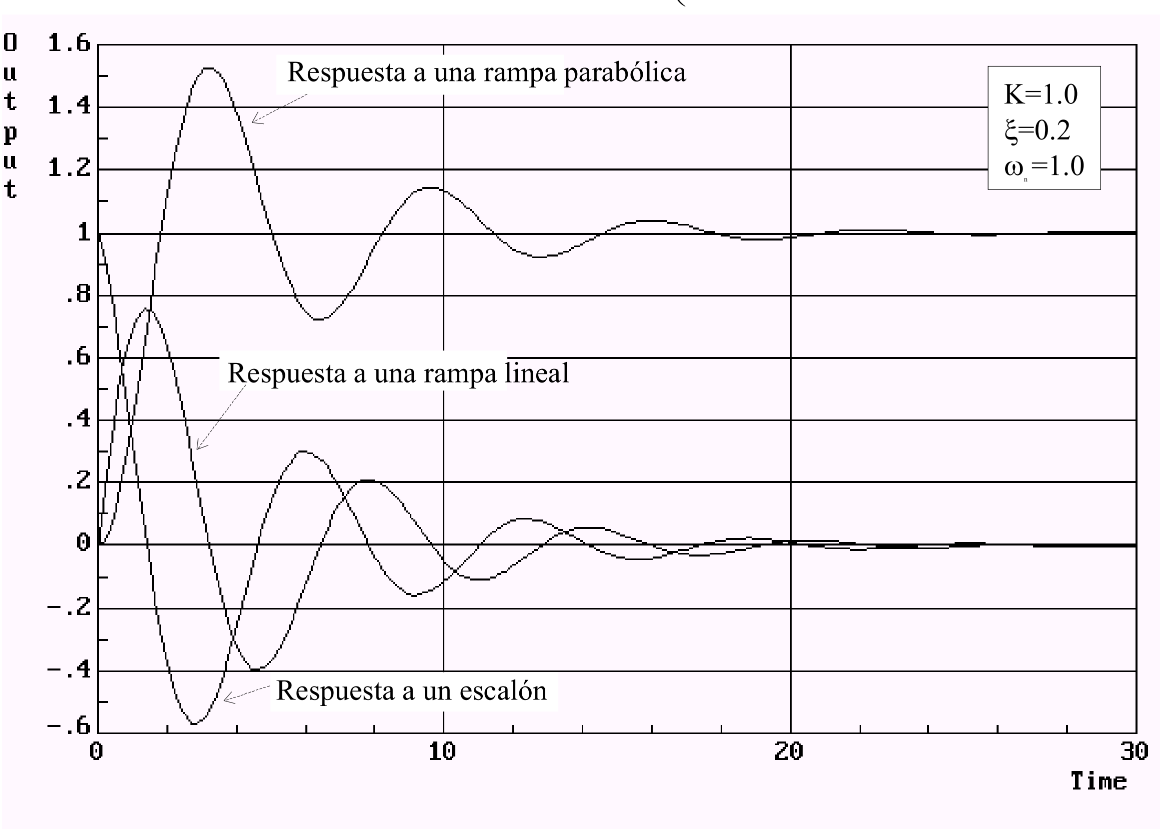
Respuesta a una Rampa Lineal: r(t)= t u(t)

$$c(t)=\frac{K}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\xi\omega_n t}\,\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t\right)=\frac{K}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}}\,\varepsilon^{-\alpha t}\,\sin(\beta\,t)$$

Respuesta a una Rampa Parabólica: r(t)= 0.5 t^2 u(t)

$$c(t)=\frac{K}{\omega_n{}^2}\left(1-\frac{\varepsilon^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\;t\right)\right)\right)=$$

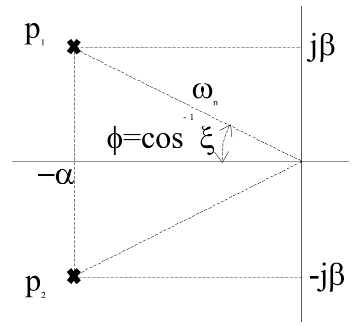
$$=\frac{K}{\omega_n{}^2}\left(1-\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\left(\cos(\beta\,t)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin(\beta\,t)\right)\right)=\frac{K}{\omega_n{}^2}\left(1-\frac{\varepsilon^{-\alpha t}}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\beta t+tg^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)\right)\right)$$



RESPUESTA TEMPORAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE BLOQUEO DE BANDA

$$G_{LP}(s) = \frac{K\left(s^2 + \omega_n{}^2\right)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2} = \frac{K\left(\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 + 1\right)}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$



La función de bloqueo de banda se puede expresar como:

$$G_{BS}(s) = G_{LP}(s) + G_{HP}(s) = \frac{Ks^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2} + \frac{K\omega_n{}^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

$$G_{BS}(s) = 1 - 2\xi G_{BP}(s) = 1 - \frac{2\xi K\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2}$$

Su respuesta temporal puede deducirse de la respuesta temporal de las funciones precedentes.