ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS
INDUSTRIALES Y DE TELECOMUNICACIÓN

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

CARACTERÍSTICAS DE LA RESPUESTA FRECUENCIAL DE LAS FUNCIONES BICUADRÁTICAS

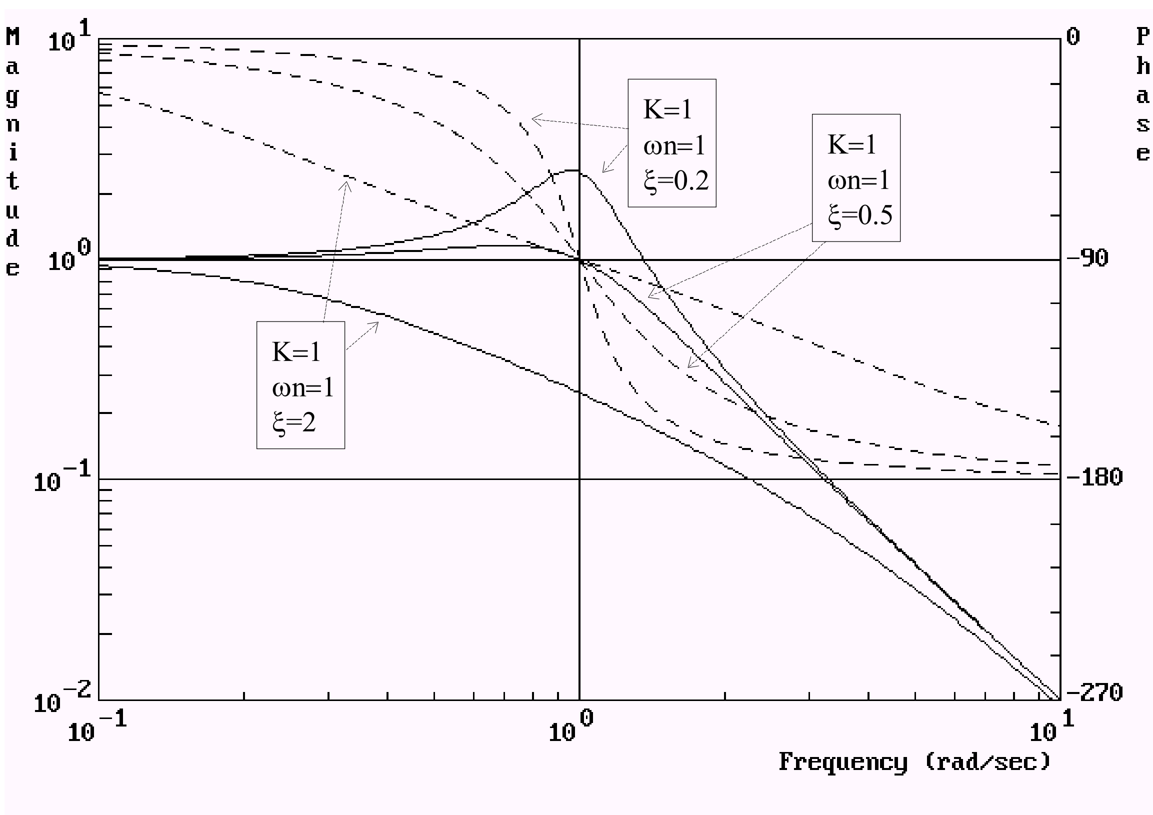
José M. Drake
CTR (Computadores y Tiempo Real)
Dpto. de Electrónica y Computadores

RESPUESTA FRECUENCIAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BAJO

$$G_{LP}(s) = \frac{K\omega_n^{\ 2}}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^{\ 2}} = \frac{K}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$\left|G_{LP}(j\omega)\right| = \frac{K}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad tg\phi = -\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Características de la respuesta frecuencial de $G_{LP}(j\omega)$:

Magnitud de la respuesta frecuencial:

- A baja frecuencia solo es función de K
  $\omega << \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{LP}(j\omega)| = \quad \log(K)$
- A alta frecuencia es función de K y ω_n
  $\omega >> \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{LP}(j\omega)| = \quad \log(K) + 2\log(\omega_n) - 2\log(\omega)$
- A frecuencias intermedias es función de k, w_n y ξ
  $$\omega \approx \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{LP}(j\omega)| = \log(K) - \frac{1}{2}\log\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$
- A la frecuencia $\omega=\omega_n$ la magnitud es
  $$|G_{LP}(j\omega_n)| = \frac{K}{2\xi}$$
- La anchura de banda de la función de transferencia es
  $$BW_{LP} = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2 + \sqrt{2 - 4\xi^2 + 4\xi^4}}$$
- La magnitud $G_{LP}(j\omega_p)$ del pico de resonancia y la frecuencia ω_p a la que se produce son:
  $$|G_{LP}(j\omega_p)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} \qquad\qquad \omega_{p\,LP} = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$$

Fase de la respuesta frecuencial:

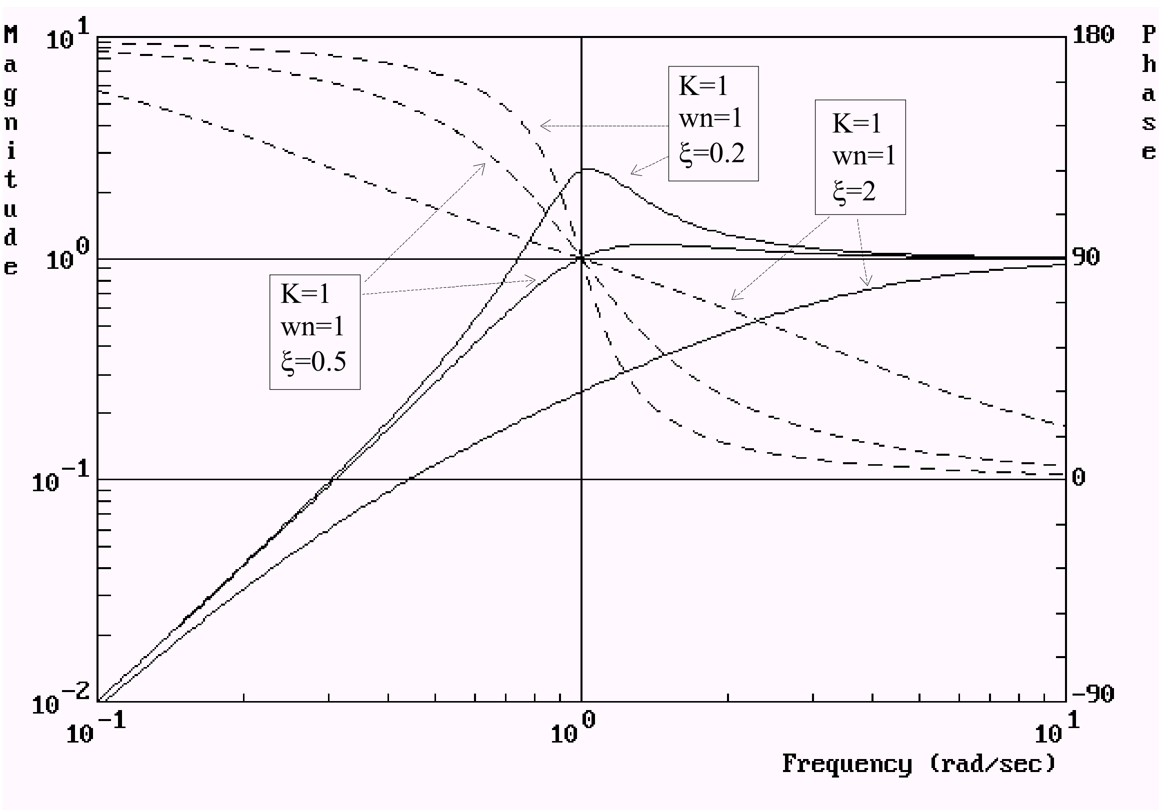
- En la frecuencia $\omega=\omega_n$ la fase es siempre –90º
  $$\arg(G_{LP}(j\omega_n)) = -90^{\circ}$$
- En las frecuencias próximas a ω_n la fase depende de ω_n y ξ:
  $$tg(\arg(G_{LP}(j\omega))) = -\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
- La pendiente de la fase en la frecuencia de resonancia es:
  $$\left.\frac{d\arg G_{LP}(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi} \quad rad/rad/s$$
  $$\left.\frac{d\arg G_{LP}(j\omega)}{d\log_{10}\omega}\right|_{\omega=\omega n} = \frac{-1}{\xi\log_{10}e} = \frac{-2.31}{\xi}\,rad/dec = \frac{-135}{\xi} \quad {}^{\circ}/dec$$

RESPUESTA FRECUENCIAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO ALTO

$$G_{HP}(s)=\frac{Ks^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n{}^2}=\frac{K\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2+2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)+1}$$

$$\left|G_{HP}(j\omega)\right|=\frac{K\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2+\left(2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad tg(\phi-180)=-\frac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Características de la respuesta frecuencial de $G_{HP}(j\omega)$:

Magnitud de la respuesta frecuencial:

- A baja frecuencia solo es función de K y ω_n
- $\omega << \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{HP}(j\omega)| = \log(K) - 2\log(\omega_n) + 2\log(\omega)$
- A alta frecuencia es función de K y ω_n

  $\omega >> \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{HP}(j\omega)| = \log(K)$
- A frecuencias intermedias es función de k, w_n y ξ

  $$\omega \approx \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{HP}(j\omega)| = \log(K) - 2\log(\omega_n) + 2\log(\omega) -$$

  $$-\frac{1}{2}\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$
- A la frecuencia $\omega=\omega_n$ la magnitud es

  $$|G_{HP}(j\omega_n)| = \frac{K}{2\xi}$$
- La anchura de banda de la función de transferencia es

  $$BW_{HP} = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2+\sqrt{2-4\xi^2+4\xi^4}}}$$
- La magnitud $G(j\omega_p)$ del pico de resonancia y la frecuencia ω_p a la que se produce son:

  $$|G(j\omega_p)| = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-2\xi^2}} \qquad \omega_p = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-2\xi^2}}$$

Fase de la respuesta frecuencial:

- En la frecuencia $\omega=\omega_n$ la fase es siempre +90º

  $$\arg(G_{HP}(j\omega_n)) = +90º$$

- En las frecuencias próximas a ω_n la fase depende de ω_n y ξ:

  $$tg(\arg(G_{HP}(j\omega)) - \pi) = -\frac{2\xi\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
- La pendiente de la fase en la frecuencia de resonancia es:

  $$\left.\frac{d\arg G_{HP}(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi} \quad rad/rad/s$$

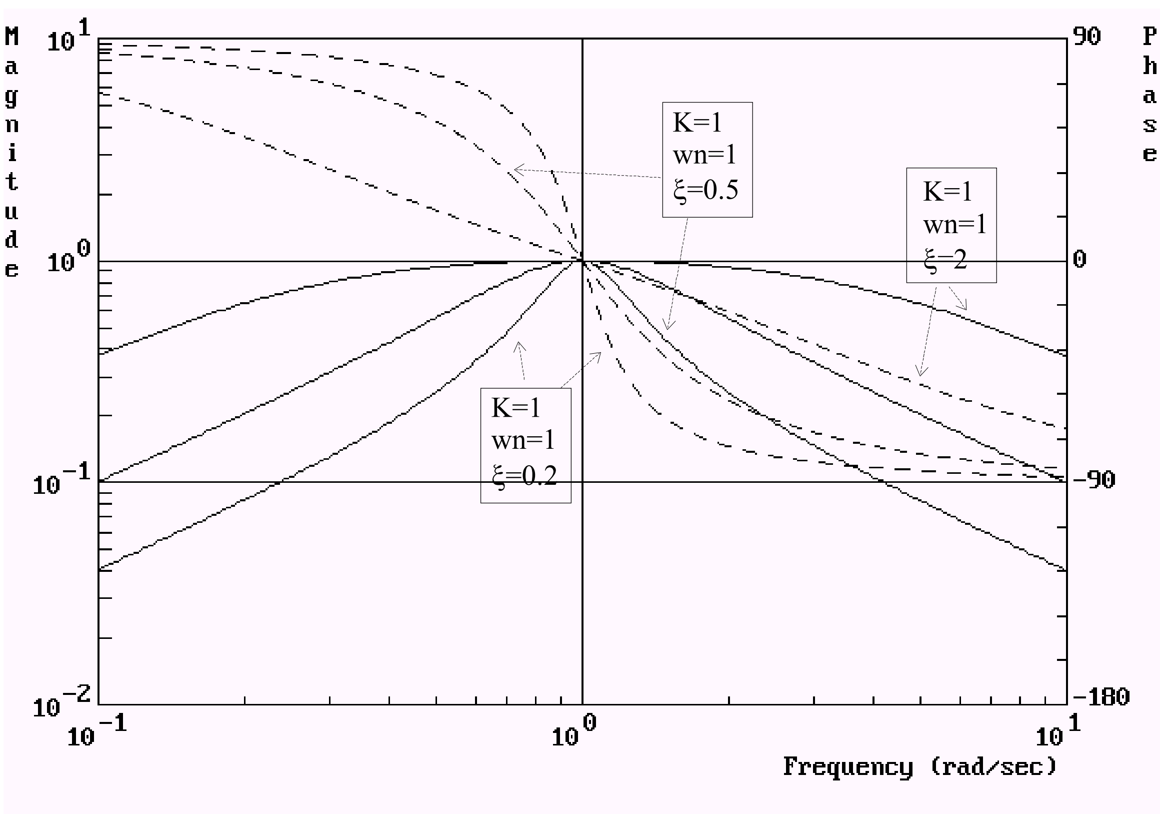
  $$\left.\frac{d\arg G_{HP}(j\omega)}{d\log_{10}\omega}\right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi\log_{10}e} = \frac{-2.31}{\xi}\, rad/dec = \frac{-135}{\xi} \quad º/dec$$

RESPUESTA FRECUENCIAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

FUNCION DE PASO BANDA

$$G_{BP}(s) = \frac{K2\xi\omega_n s}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{K2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right)}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\frac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$\left|G_{BP}(j\omega)\right| = \frac{K2\xi\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}} \qquad tg(\phi - \frac{\pi}{2}) = -\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$



Características de la respuesta frecuencial de $G_{BP}(j\omega)$:

Magnitud de la respuesta frecuencial:

- A baja frecuencia solo es función de K, ξ y ω_n
- $\omega << \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{BP}(j\omega)| = \log(2\xi K) - \log(\omega_n) + \log(\omega)$
- A alta frecuencia es función de K, ξ y ω_n

  $\omega >> \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{BP}(j\omega)| = \log(2\xi K) + \log(\omega_n) - \log(\omega)$
- A frecuencias intermedias es función de k, w_n y ξ

  $$\omega \approx \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log|G_{BP}(j\omega)| = \log(2\xi K) - \log(\omega_n) + \log(\omega) - $$
  $$- \frac{1}{2}\log\left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$
- A la frecuencia $\omega=\omega_n$ la magnitud es

  $$|G_{BP}(j\omega_n)| = K$$
- Las anchuras de banda de la función de transferencia a –3dB y a –20dB son

  $$\omega_{-3dB} = \omega_n\left[\sqrt{\xi^2+1} \pm \xi\right] \quad \Rightarrow \quad BW_{BP-3dB} = (\omega_{-3dBH} - \omega_{-3dBL}) = 2\xi\omega_n = \frac{\omega_n}{Q}$$
  $$\omega_{-20dB} = \omega_n\left[\sqrt{(9.95\xi)^2+1} \pm 9.95\xi\right] \quad \Rightarrow \quad BW_{BP-20dB} = (\omega_{-20dBH} - \omega_{-20dBL}) = 19.9\xi\omega_n$$
  $$BW_{BP-20dB} / BW_{BP-3dB} = 9.95$$
- La magnitud $|G(j\omega)|$ es simétrica respecto de la frecuencia ω_n.

Fase de la respuesta frecuencial:

- En la frecuencia $\omega=\omega_n$ la fase es $\arg(G(j\omega_n)) = 0^\circ$

- En las frecuencias próximas a ω_n la fase depende de ω_n y ξ:

  $$tg(\arg(G_{BP}(j\omega)) - \frac{\pi}{2}) = -\frac{2\xi\frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}$$
- La pendiente de la fase en la frecuencia de resonancia es:

  $$\left.\frac{d\arg G_{BP}(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi} \quad rad/rad/s$$
  $$\left.\frac{d\arg G_{BP}(j\omega)}{d\log_{10}\omega}\right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi\log_{10}e} = \frac{-2.31}{\xi}\, rad/dec = \frac{-135}{\xi} \quad {}^\circ/dec$$

RESPUESTA FRECUENCIAL DE DE LA FUNCIÓN BICUADRATICA.

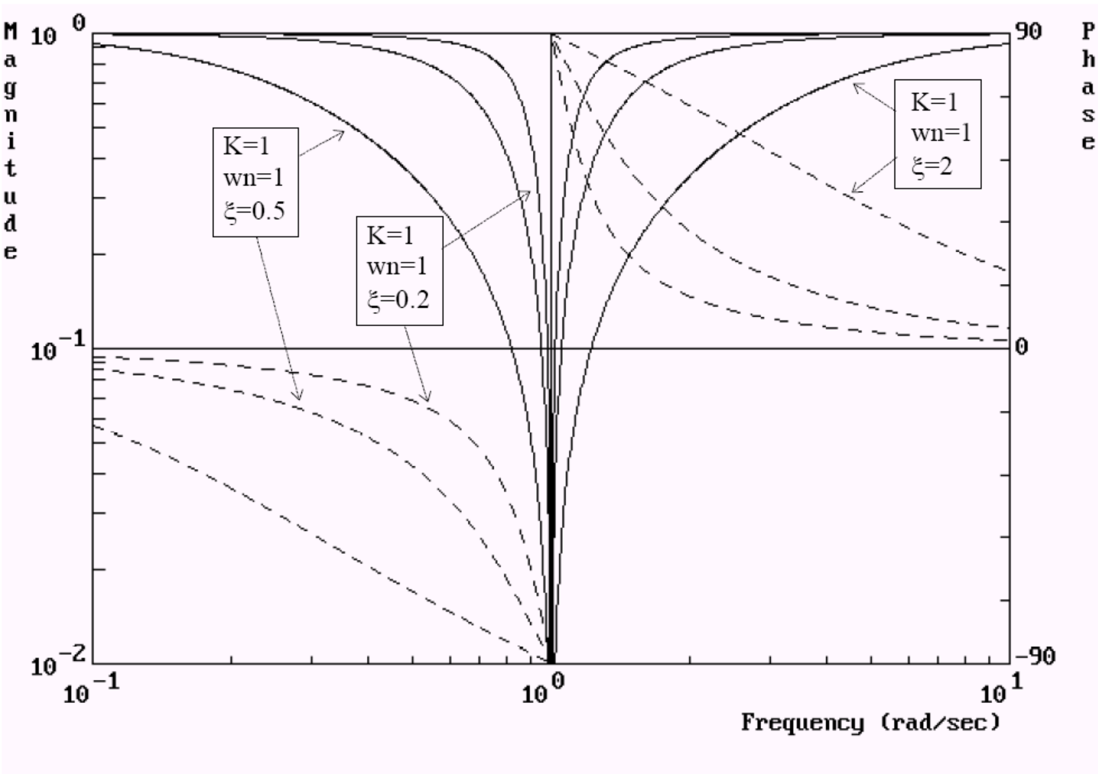
FUNCION DE BLOQUEO DE BANDA (BAND STOP)

$$G_{BS}(s) = \frac{K(s^2 + \omega_n{}^2)}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n{}^2} = \frac{K\left(\dfrac{s^2}{\omega_n{}^2} + 1\right)}{\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\xi\left(\dfrac{s}{\omega_n}\right) + 1}$$

$$\left|G_{HS}(j\omega)\right| = \frac{K\left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_n{}^2}\right)}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right)^2 + \left(2\xi\,\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

$$tg(\phi) == -2\xi \frac{\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (si\ \omega < \omega_n)$$

$$tg(\phi + \pi) == -2\xi \frac{\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2} \quad (si\ \omega > \omega_n)$$



Características de la respuesta frecuencial de $G_{BS}(j\omega)$:

Magnitud de la respuesta frecuencial:

- A baja y alta frecuencia solo es función de K

$$\begin{matrix}\omega \ll \omega_n \\ \omega \gg \omega_n\end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \log\left|G_{BS}(j\omega)\right| = \quad \log(K)$$

- A frecuencias intermedias es función de k, w_n y ξ

$$\omega \approx \omega_n \quad \Rightarrow \quad \log\left|G_{BS}(j\omega)\right| = \log(K) + \log\left(\left|1-\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right|\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\log\left[\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_n^{\ 2}}\right)^2 + \left(2\xi\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2\right]$$

- A la frecuencia $\omega=\omega_n$ la magnitud es $\left|G_{BS}(j\omega_n)\right| = 0$
- Las anchuras de banda de la función de transferencia a –3dB y a –20dB son

$$\omega_{-3dB} = \omega_n\left[\sqrt{\xi^2+1} \pm \xi\right] \quad \Rightarrow \quad BW_{BS-3dB} = (\omega_{-3dBH} - \omega_{-3dBL}) = 2\xi\omega_n = \frac{\omega_n}{Q}$$

$$\omega_{-20dB} = \omega_n\left[\sqrt{\left(\frac{1}{(9.95\xi)}\right)^2+1} \pm \frac{1}{(9.95\xi)}\right] \quad \Rightarrow \quad BW_{BS-20dB} = (\omega_{-20dBH} - \omega_{-20dBL}) = \frac{\omega_n}{9.95\xi}$$

$$BW_{BS-3dB} / BW_{BS-20dB} = 9.95$$

- La magnitud $|G(j\omega)|$ es simétrica respecto de la frecuencia ω_n.

Fase de la respuesta frecuencial:

- En la frecuencia $\omega=\omega_n$ la fase tiene una transición de 180º

- La pendiente de la fase en la proximidad de la frecuencia de resonancia es:

$$\left.\frac{d\arg G_{BS}(j\omega)}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_n} = \frac{-1}{\xi} \quad rad/rad/s$$

$$\left.\frac{d\arg G_{BS}(j\omega)}{d\log_{10}\omega}\right|_{\omega=\omega n} = \frac{-1}{\xi\log_{10}e} = \frac{-2.31}{\xi}\ rad/dec = \frac{-135}{\xi} \quad {}^{\circ}/dec$$