

**ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
Y DE TELECOMUNICACION**

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA



INSTRUMENTACION ELECTRÓNICA DE COMUNICACIONES

(5º Curso Ingeniería de Telecomunicación)

Tema I:

Introducción a los sistemas de instrumentación

**José María Drake Moyano
Dpto. de Electrónica y Computadores
Santander, 2005**

Contenido:

- I.1 Sistemas de instrumentación.**
- I.2 Instrumentación computarizada.**
- I.3 Caracterización de un instrumento.**
- I.4 Conceptos estadísticos del proceso de medida.**
- I.5 Cálculo de la incertidumbre de una medida.**

CAPITULO 1

INTRODUCCIÓN A LOS SISTEMAS DE INSTRUMENTACIÓN

1.1 SISTEMAS DE INSTRUMENTACION.

La **instrumentación** trata los sistemas integrados cuya finalidad es medir magnitudes físicas de un sistema externo, elaborar la información asociada a ellas y presentarla a un operador.

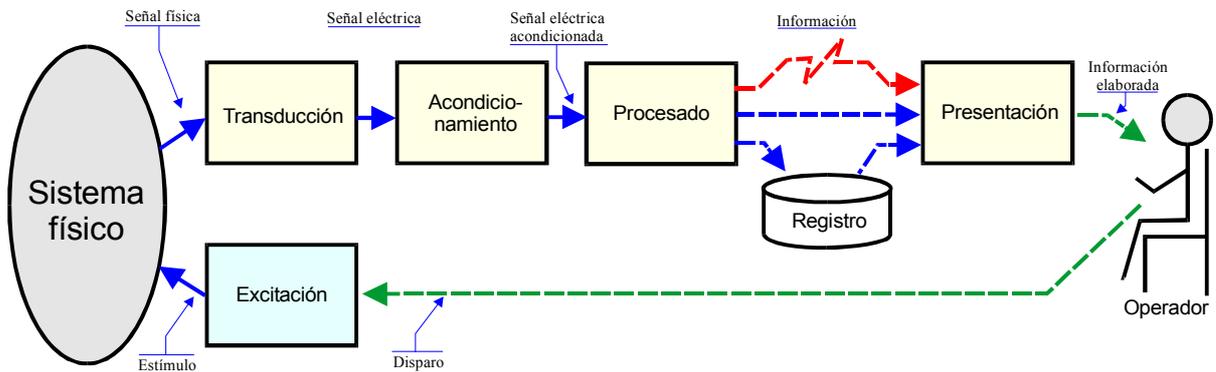
Las características por las que la **tecnología electrónica** es la mas utilizada por los sistemas de instrumentación, son:

- Las señales eléctricas permiten manejar señales en un rango dinámico de tiempos muy amplio (10^{15}), desde los picosegundos (10^{-12} s) hasta horas (10^3 s).
- Las señales eléctricas pueden ser transmitidas muy fácilmente a través de cables metálicos, sistemas radiados, o fibra óptica.
- Las señales eléctricas pueden ser amplificadas por circuitos electrónicos de forma muy eficientes, y pueden manejarse rangos de señal muy amplios (10^{12}), desde los nanovoltios (10^{-9} V) hasta los kilovoltios (10^3 V).
- La sistemas electrónico permite complejas transformaciones funcionales de las señales eléctricas.
- Las señales eléctricas son las más apropiada para ser introducidas en los computadores, los cuales representan el medio más potente de registro, transformación y presentación de la información.
- La tecnología electrónica actual es la que presenta mejor relación prestaciones /costo.

La instrumentación electrónica presenta actualmente ciertas **desventajas**:

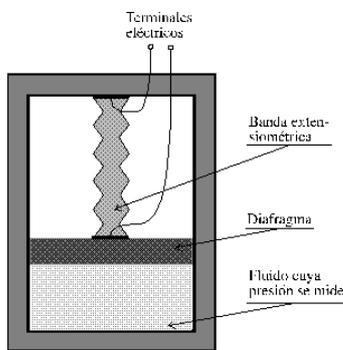
- Presenta un rango de temperaturas limitado desde -50 °C hasta 175 °C.
- Son equipos sensibles a la radiación de alta energía.
- Requiere una fuente de potencia para su operación.
- Los componentes electrónicos activos suelen presentar deriva por envejecimiento.

En la figura se muestra el esquema básico de cualquier sistema de instrumentación.



a) Transductor

- El transductor es el componente que convierte la magnitud física a medir, en una señal eléctrica.
- En este componente se puede diferenciar entre el **sensor**, que es el elemento sensible primario que responde a las variaciones de la magnitud que se mide, y el **transductor** que es el que lleva a cabo la conversión energética entre la magnitud de entrada y de salida.



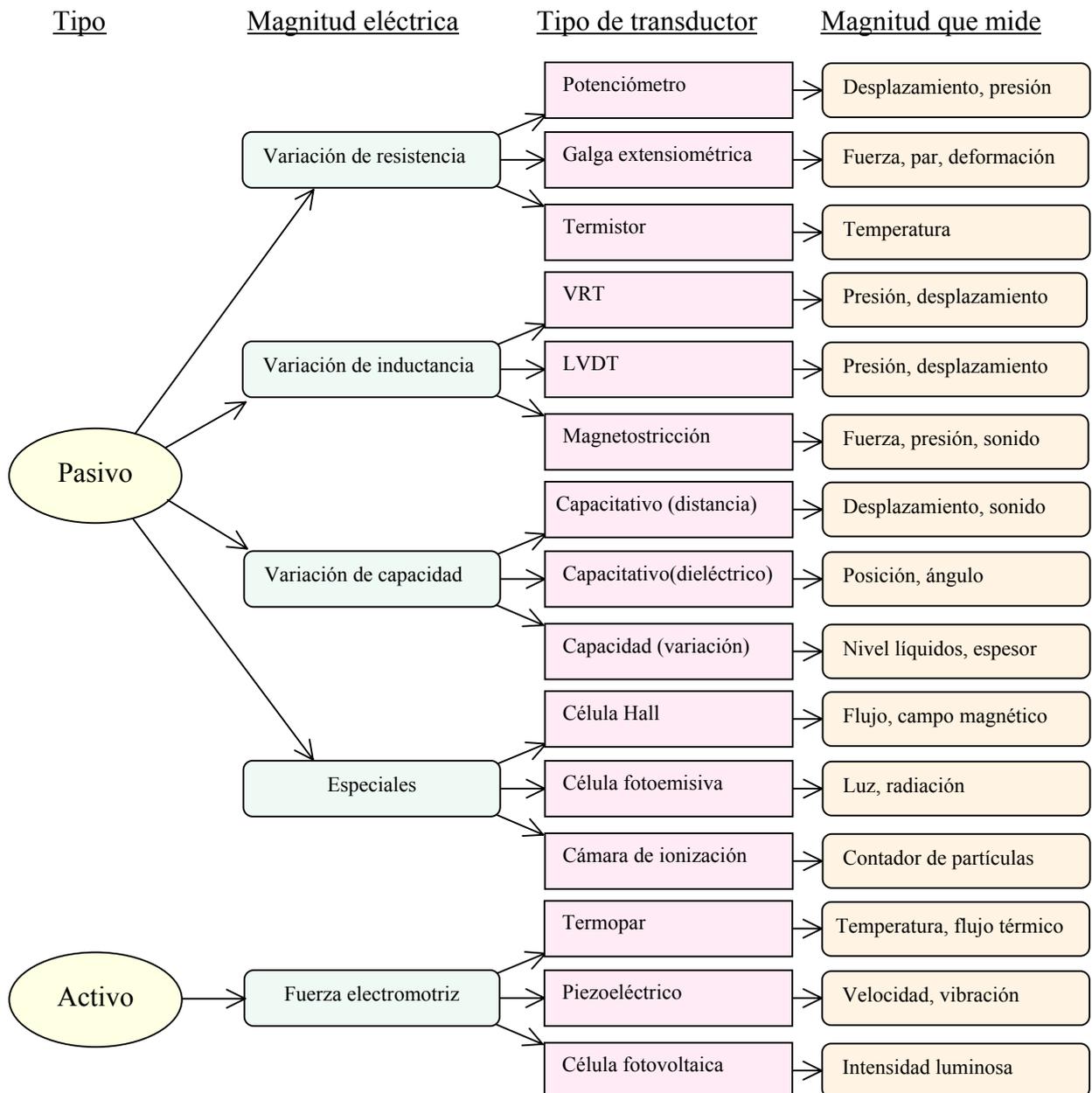
Transductor de presión

Ejemplo:

Un transductor de presión se puede construir con una membrana a la que se une una galga extensiométrica (resistencia cuyo valor depende de su deformación).

En este caso, el diafragma es el sensor, mientras que la galga es el transductor.

- Los transductores se suelen clasificar en dos grupos:
 - o Los **transductores activos** son dispositivos que generan energía eléctrica por conversión de energía procedente del sistema sobre el que mide. Los transductores activos no necesitan fuente de alimentación para poder operar.
 - o Los **transductores pasivos** son aquellos, en los que no se produce conversión de energía. Algún parámetro del transductor es función de la magnitud que se mide, y las variaciones de este parámetro es utilizado para modular la energía eléctrica procedente de una fuente que en este caso se necesita.



b) Acondicionamiento de la señal.

- Este bloque incluye todas aquellas transformaciones que deben realizarse sobre señales eléctricas que resultan en la salida del transductor, y que son previas al procesado para extraer la información que se mide o evalúa.
- Existen dos razones por las que las señales de salida del transductor deban ser acondicionadas:
 - 1) Cuando el tipo de señal eléctrica que se proporciona el transductor **no es una tensión**, se utiliza un convertidor desde el tipo de señal de que se trate, a tensión.

Así en transductores resistivos, es normal que se utilice un circuito puente para convertir el valor de resistencia a tensión. Cuando el transductor es de tipo capacitativo o inductivo, se suele montar como parte de un oscilador, y la magnitud de salida es una frecuencia, y debe utilizar un convertidor frecuencia/tensión.

2) La señal debe ser acondicionada para **incrementar la relación señal ruido** hasta niveles adecuados. Esto tipo de acondicionamiento implica:

- **Amplificar** las señales hasta niveles que sean suficientemente superiores al nivel de ruido eléctrico aleatorio.
- **Filtrar** la señales para eliminar ruidos introducidos por interferencia eléctrica.
- Cuando el procesamiento de la señal es digital, el acondicionamiento corresponde a la conversión Analógica/Digital.

c) Procesamiento de la señal.

- Incluye el conjunto de transformaciones a que debe ser sometida la señal eléctrica a fin de extraer de ella, la información que se busca.
- El procesamiento de la señal suele contener muy diversas operaciones, ya sean lineales, no lineales, de composición de múltiples señales, o de procesado digital de las señales.

d) Registro de la señal

- Consiste en el almacenamiento permanente o temporal de las señales para su posterior análisis o supervisión. Este operación es necesaria si el flujo de información que se adquieren supera la capacidad de procesamiento de que se dispone.
- El método tradicional de registro ha sido el basado en cinta magnética, ya sea a través de grabación analógica o utilizando codificación digital. Actualmente los métodos de registro que se utilizan, están basados en un computador, y el soporte en que se almacena la información es cualquiera de los sistemas de memoria masiva de que disponen estos equipos (memoria, discos, diskettes, cinta magnética, etc.)

e) Telemetría

- A veces, las señales son adquiridas en puntos remotos, de difícil acceso o con condiciones ambientales hostiles, y es necesario aislar los componentes de captación, de los equipos de procesamiento y presentación. En estos casos, es necesario transmitir la señales entre la captación y el procesamiento mediante un

canal de comunicación. Para adaptar las señales a las características de canal de comunicación es necesario introducir procesos de modulación, demodulación o codificación apropiados.

f) Presentación de la información

- La información resultante del proceso de medida debe ser presentada de forma comprensible al operador, o elaborada e integrada para que pueda ser interpretada por un sistema supervisor automático.
- Los sistemas de presentación de información eléctrica analógica tradicionales, han sido: los indicadores de aguja, los registradores gráficos de papel y los tubos de rayos catódicos.
- Actualmente, los terminales alfanuméricos y gráficos basados en computadores suelen ser el método más utilizado para presentar todo tipo de información.

g) Generador de estímulo

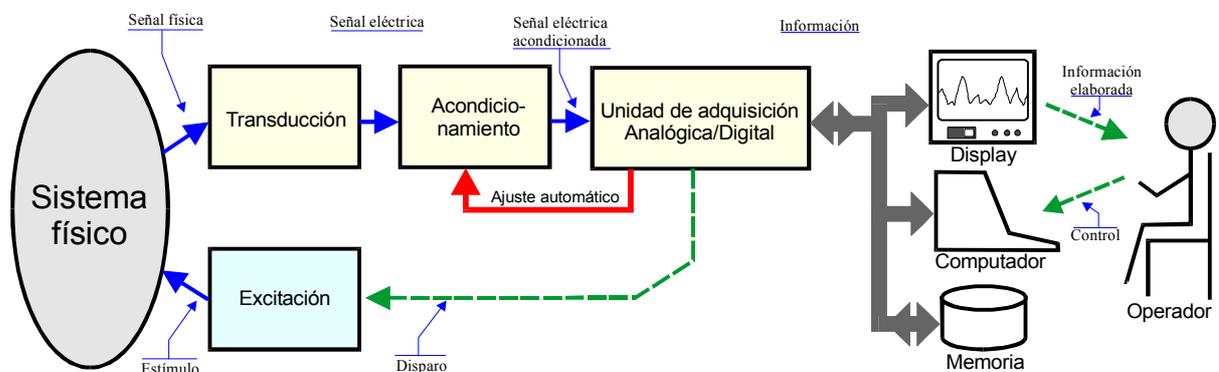
- En muchos casos los sistemas no son activos sino reactivos, y para medir cualquier magnitud, se tiene que estimular el sistema físico mediante señales generadas por la propia instrumentación de medida.
- Habitualmente el estímulo y el proceso de medida deben estar sincronizados, de forma que solo las señales que sean respuesta del estímulo sean analizadas.

1.2 INSTRUMENTACION COMPUTARIZADA.

Instrumento basado en computador.

Actualmente muchos de los equipos de instrumentación están basados en un computador. El computador resuelve todos los aspectos relativos al procesado de la señal, al registro, a la transferencia y a la presentación de la información. A estos equipos basados en computador, se suelen llamar instrumentación inteligente.

La principal diferencia entre un equipo de instrumentación convencional, y un equipo inteligente es que mientras que en el convencional los datos de medida son generados uno a uno y deben ser interpretado e interpretados por el operador, en la instrumentación inteligente se puede registrar grandes cantidades de información de forma automática y luego presentarla de forma integrada y amigable al operador.



La instrumentación computarizada requiere el uso de transductores y circuitos analógicos que acondicionen la señal a los niveles adecuados para ser codificada en las mejores condiciones por el convertido A/D, sin embargo el procesado, elaboración y presentación del resultado en la medida se realizan utilizando software.

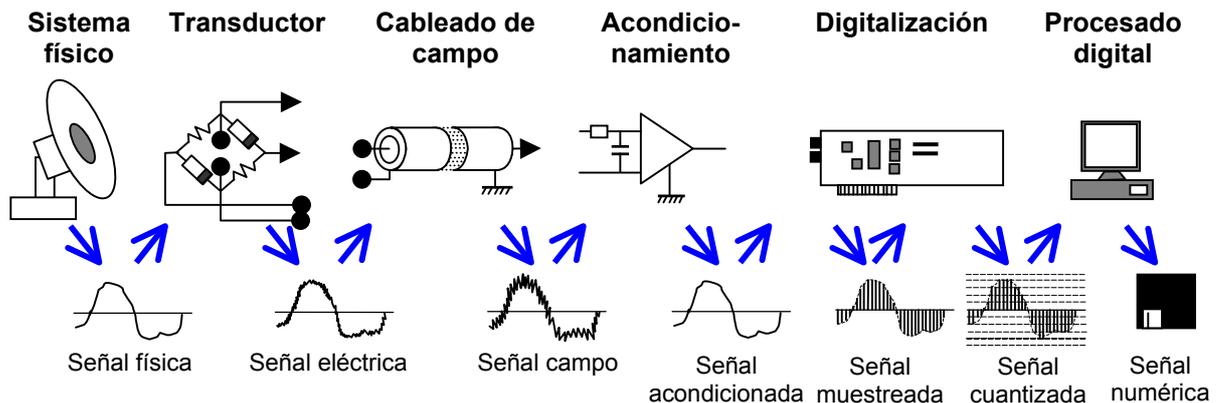
Con la incorporación del computador, las señales que se adquieren pueden ser procesadas sin límite de complejidad y sofisticación utilizando técnicas numéricas, a fin de acondicionarla y extraer de ella la información. Así mismo, la información puede ser procesada utilizando métodos estadístico.

El computador proporciona una amplia gama de recursos para almacenar la información que se adquiere, así como para presentarla utilizando técnicas numéricas y gráficas.

La incorporación del computador presenta grandes ventajas:

- La mayor capacidad para procesar, almacenar y presentar la información que se obtiene al poder utilizar métodos numéricos.

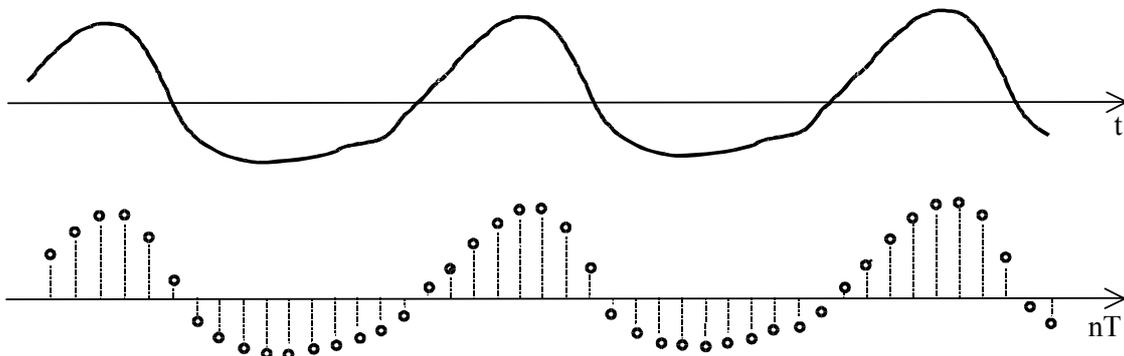
- Menor costo que resulta de la estandarización del hardware que se requiere para construir los equipos.
- El incremento en la facilidad para diseñar y mantener los equipos que requieren mas de expertos de programación y procesado numérico de señales y menos de expertos en electrónica analógica.



El uso del computador requiere la representación numérica de la información analógica y continua en el tiempo que es propia de los sistemas físicos. Ello conlleva resolver el proceso de discretización sin que las pérdidas de resolución y de rango dinámico sean significativas.

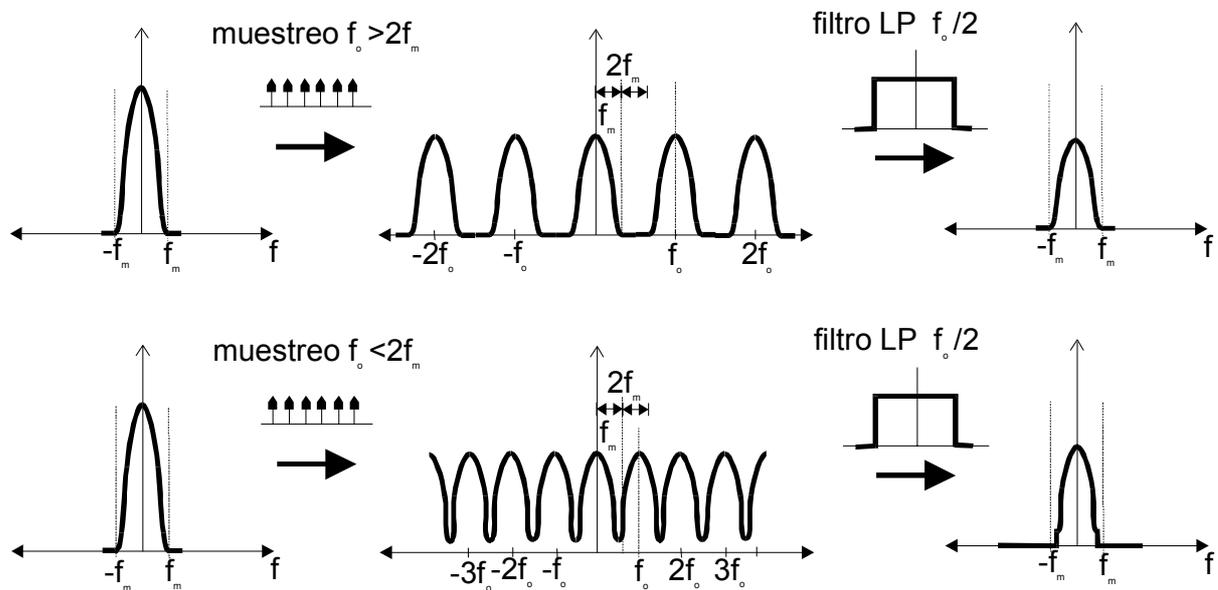
Proceso de muestreo.

Es el proceso por el que los infinitos valores de una señal continua en el tiempo se representa mediante una secuencia finita de valores que corresponden a los valores de la señal en un conjunto finito de instantes. Esto implica la pérdida de los valores de los infinitos instantes intermedios.



En el caso general, el proceso de muestreo de una señal implica pérdida de la información que contiene la señal.

Sin embargo el **teorema de muestreo de Nyquist**, establece que si la señal muestreada tiene un espectro limitado, esto es, si su espectro no contiene componentes de frecuencias superiores a una frecuencia f_m , y es muestreada con una frecuencia superior a $f_0=2 f_m$, el proceso de muestreo no conlleva pérdida de información, esto es, la señal muestreada puede reconstruirse exactamente a partir de las muestras.



Si se muestrea una señal que contenga componentes superiores a la mitad de la frecuencia de muestreo, debe previamente ser filtrada con un filtro de paso bajo de frecuencia de corte $f_0/2$ (filtro Antialiasing), a fin de que las componentes de frecuencia superior no se solapen con las frecuencias inferiores, distorsionándola.

Un muestreo a una frecuencia superior a la de Nyquist, permite su reconstrucción exacta, pero supone un incremento de registro de datos y un mayor flujo de procesamiento.

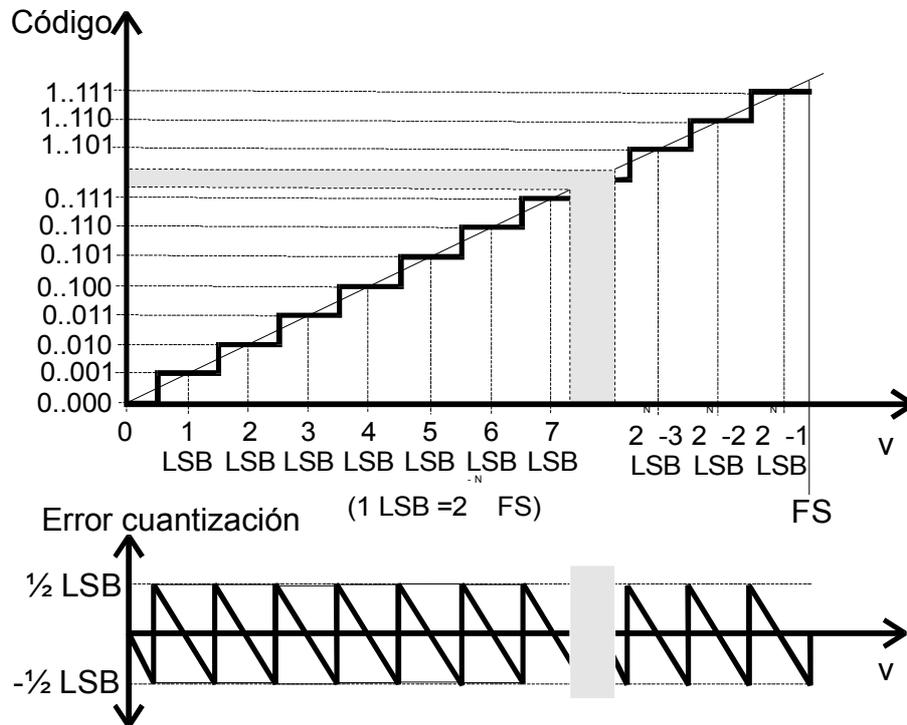
Proceso de discretización

La codificación de un valor analógico mediante un código numérico implica un proceso de discretización, y en consecuencia de la introducción de un ruido que degrada la información que transfiere.

Un convertidor A/D que codifica una tensión analógica mediante un código binario se caracteriza por los siguientes parámetros:

Rango dinámico: Hace referencia al rango de valores de tensión de entrada (FSI – FSS) que pueden ser codificados por el A/D. El convertidor admite entradas que verifican $FSI \leq v_{AD} \leq FSS$. El rango completo de conversión es $FSV = FSS - FSI$.

Polaridad: Los convertidores pueden ser **unipolar** si sólo admiten tensiones de entrada de una sola polaridad o bipolar si admite tanto tensiones de entrada y de salida.



Resolución: Es el rango de entrada que corresponde a cada código de salida. Se denomina 1-LSB (rango que corresponde a la variación del bit menos significativo). Habitualmente se expresa como el número de bits del código que genera en su salida. Un convertidor con N-bits de resolución, tiene 2^N códigos, y cada código se corresponde a una tensión de $2^{-N} \cdot FSV$ voltios.

Error de cuantización: es la diferencia entre el valor de la entrada y el valor nominal que corresponde al código correspondiente de salida. El máximo error de cuantización es $\pm 1/2 \text{ LSB} = \pm 2^{-(N+1)} \cdot FSV$.

Tiempo de conversión: Es el máximo tiempo que transcurre entre que se dispara la conversión y se hace disponible el código de salida. El tiempo de conversión representa el mínimo de del periodo de muestreo (o lo que es lo mismo el máximo de frecuencia de muestreo).

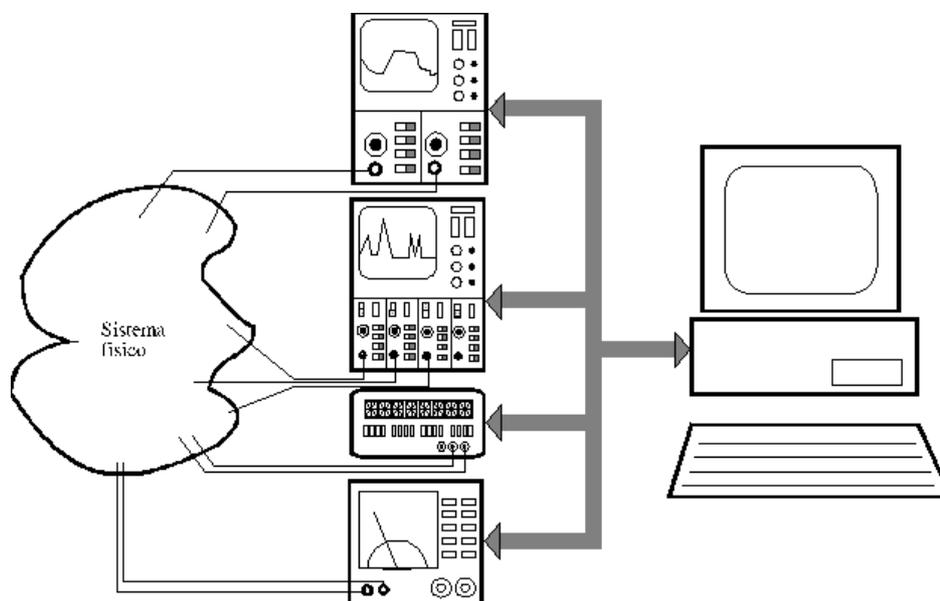
Entorno de instrumentación controlado por ordenador.

Un sistema de instrumentación requiere operar siempre con prestaciones de tiempo real, y el desarrollo de software con este tipo de requisitos es difícil de desarrollar. Este problema se resuelve utilizando equipos de instrumentación de propósito específico, para ejecutar las tareas críticas y dejar para el instrumentista solo el desarrollo del software de tipo convencional (sin requisitos de tiempo real) que realiza desde un computador el control y coordinación de los equipos y la recuperación, integración y presentación al operador de la información que proporcionan estos instrumentos.

En estos casos, el computador controla y gestiona los diferentes equipos y almacena e integra la información que generan.

Ventajas que se obtienen de estos sistemas son:

- Permiten construir estructuras complejas de instrumentación utilizando equipos sencillos de bajo costo.
- Permite llevar a cabo operaciones complejas que se pueden repetir en periodos de tiempo cortos.
- Pueden integrar informaciones muy complejas utilizando los recursos del computador.
- No requiere el desarrollo de software con requerimientos de tiempo real.



La arquitectura de un entorno computarizado es definido por el **bus de comunicaciones**, que establece la interoperatividad entre los equipos, definiendo los modos de transferencia de comandos de control y de información entre ellos. En un sistema instrumental el bus de comunicaciones debe corresponder a un estándar, de forma que los equipos que integren el sistema puedan ser de cualquier fabricante.

En función de las características de despliegue que se necesita, se suelen utilizar diferentes tipos de buses.

Los equipos se instalan en un armario:

- Bus XMI
- Bus VME

Los equipos se instalan en una habitación:

Punto a punto:

- RS-232
- RS-442
- RS-485

Buses:

- GPIB 0 IEEE-488
- USB
- CAN-Bus

Los equipos se instalan en un edificio o ciudad:

- Ethernet
- X.25

I.3 CARACTERIZACIÓN DE UN INSTRUMENTO.

En este apartado se va a tratar la forma de caracterizar el comportamiento de un sensor o instrumento de medida como **caja negra**, esto es, a través del análisis de las respuestas que ofrece a un determinado conjunto de estímulos de entrada y sin que se utilice la información de su estructura y diseño interno.

Así mismo, consideramos una **hipótesis determinista**, esto es, que la respuesta del sistema de instrumentación a una misma entrada es siempre la misma.

La caracterización se realiza de forma independiente bajo dos situaciones: comportamiento **estático** y comportamiento **dinámico**.

A. Comportamiento estático

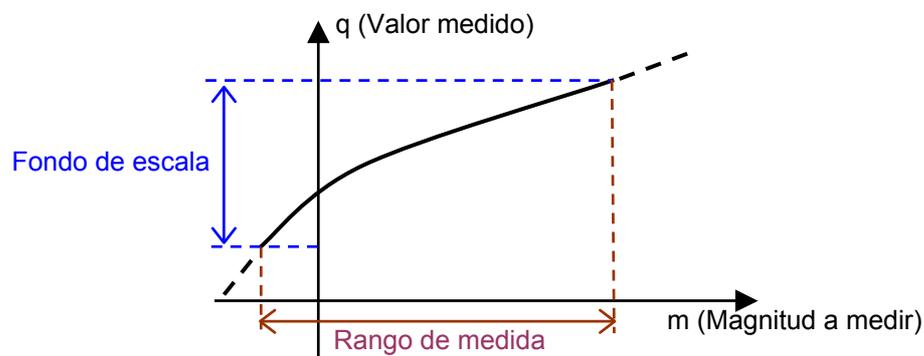
Un sistema opera en **régimen estático**, si la variable que se mide permanece constante en el tiempo, o cuando en cada medida se espera para medir la salida un tiempo suficiente para que la respuesta haya alcanzado el valor final o régimen permanente.

El régimen estático es útil para caracterizar el comportamiento del sistema de instrumentación cuando la magnitud que se mide varía con un espectro frecuencial que sólo contiene componentes inferiores a la **anchura de banda** del equipo de medida.

Los principales parámetros que se utilizan para caracterizar el comportamiento estático de un instrumento son:

Parámetros que caracterizan los límites de medida:

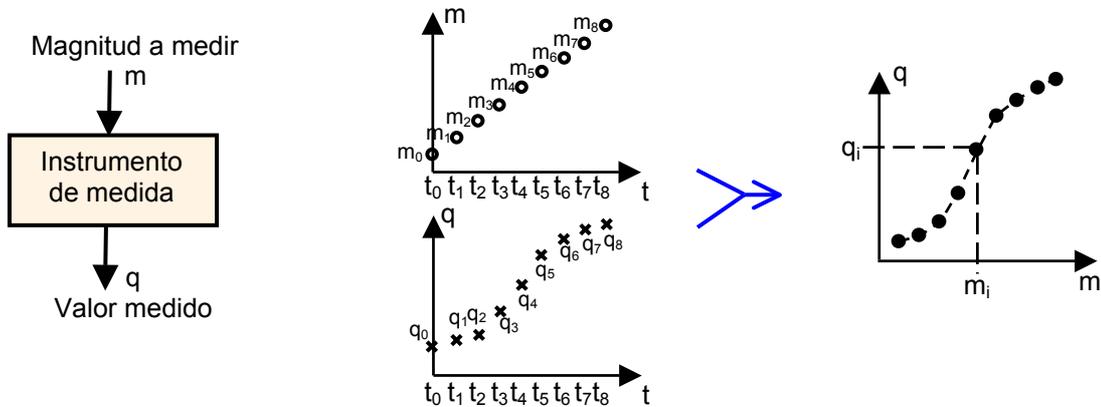
- **Rango de medida** (*range, span, input full scale*): Conjunto de valores de la magnitud que se mide para los que el sistema de instrumentación proporcione una respuesta correcta. También se suele denominar **rango dinámico** del instrumento.



- **Fondo de escala** (*full scale output, FSO*): Conjunto de respuestas que proporciona el sistema de instrumentación cuando su entrada varía en el rango de medida.

Curva de transferencia estática (*Static transfer curve*): Es la curva experimental que relaciona cuantitativamente cada valor “m” dentro del rango de medida que se mide, y los

valores de respuesta “q” que resultan de la medida de los mismos. Habitualmente se representa mediante una curva de calibrado que representa las respuestas del sistema a estímulos patrones.

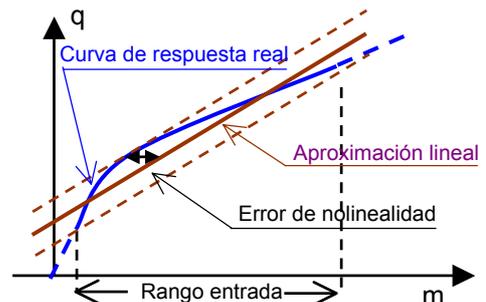


Linealidad (linearity): Cuando la curva de transferencia es una recta el sistema se dice que es lineal.

$$q = a \times m + b$$

- Ningún sistema real **nunca es exactamente lineal**, la tecnología actual hace posible diseñar sistemas que tenga un comportamiento muy próximo al comportamiento lineal.
- El uso de componentes lineales permite construir sistemas con comportamiento **analizable analíticamente**.
- Un sistema lineal puede caracterizarse por dos únicos parámetros:
 - o La **sensibilidad o ganancia (sensitivity)** (a) : que es la pendiente de la curva de transferencia.
 - o El **nivel para entrada nula (offset, offset for null input)** (b): que es la intersección de la curva de transferencia o su extrapolación con la línea $m = 0$.
- A veces no es posible plantear un comportamiento lineal global del instrumento, sino que se utiliza un comportamiento lineal diferente para cada rango parcial de entrada (**curva de transferencia lineal por tramos o poligonal**).

- **Error de no linealidad (nonlinearity error):** En la máxima desviación de la curva de transferencia real de un sistema respecto del comportamiento lineal con que se ha aproximado.



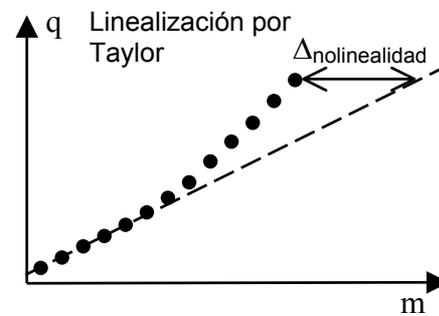
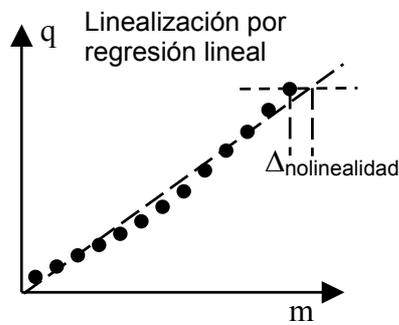
- El error de no linealidad se puede medir con las siguientes magnitudes:

$$\text{Error de no linealidad absoluto} \quad \Delta_{\text{no linealidad}} = \text{máximo} \left[(m_i - m_j) \Big|_{q_{\text{real}}(m_i) = q_{\text{lineal}}(m_j)} \right]$$

$$\text{Error de no linealidad normalizado} \quad \varepsilon_{\text{no linealidad}} = \frac{\Delta_{\text{no linealidad}}}{FSO}$$

$$\text{Tanto por ciento de no linealidad} \quad \%_{\text{no linealidad}} = \frac{\Delta_{\text{no linealidad}}}{q_{\text{real}}}$$

- El error de linealidad siempre esta referido a lo que el diseñador considera comportamiento lineal, lo cual depende del contexto en que está trabajando.



- **Umbral (threshold) y resolución (resolution):**

El **umbral** es la mínima desviación respecto del valor cero de la magnitud que se mide, que es apreciable en la respuesta del equipo.

Se denomina **resolución** a la mínima desviación respecto de un valor dado de la magnitud que se mide, que puede ser discriminada en la respuesta.

- **Estabilidad (stability) y deriva (drift):** La estabilidad y deriva son conceptos complementarios

La **estabilidad** de un sistema de medida, es su capacidad para mantener invariable su curva de transferencia durante largos períodos de tiempo.

La **deriva** de un instrumento es la variación o fluctuación de su curva de transferencia a lo largo del tiempo.

- **Zona muerta** (*dead zone*):

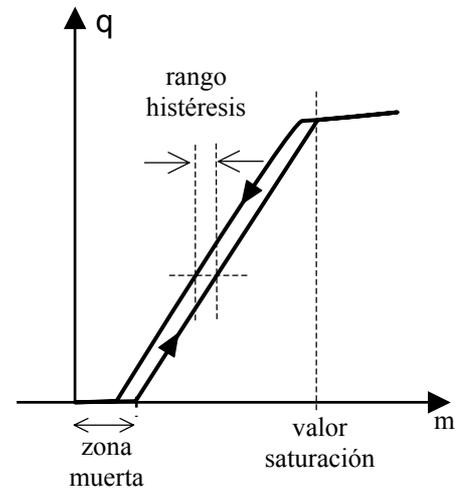
Es el rango de valores de la magnitud que se mide alrededor del valor nulo, para el que el instrumentos no proporciona respuesta.

- **Histéresis** (*hysteresis*):

Es la diferencia que se obtiene en la respuesta del instrumento de medida en función del sentido en que se ha alcanzado la magnitud que se mide.

- **Saturación** (*saturation*):

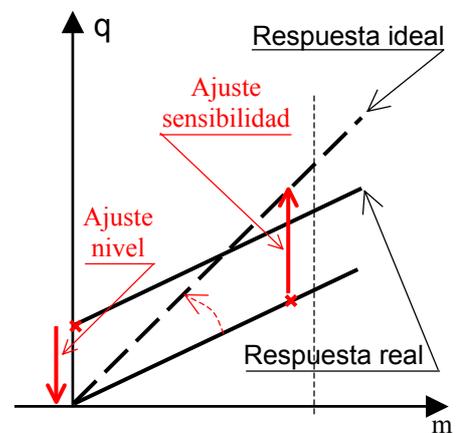
Es el nivel de entrada a partir del cual la sensibilidad del instrumento disminuye de forma significativa. Se suele expresar con referencia a un determinado error de linealidad.



Calibración

La calibración de un instrumento consiste en modificar la curva de transferencia de un equipo para que proporcione resultados de medida que se correspondan lo más exactamente posible con el valor que se mide.

- En el caso de un sistema lineal la calibración se puede realizar ajustando su dos parámetros: el nivel y la sensibilidad.
-
- La calibración puede realizarse con dos medidas:
 - o Realizando una medida nula (blanco) se ajusta el nivel u offset.
 - o Realizando una medida de un valor conocido (patrón) se ajusta la sensibilidad.



Existe un problema inherente a la calibración, y es la necesidad de conocer el valor real de un conjunto de medidas:

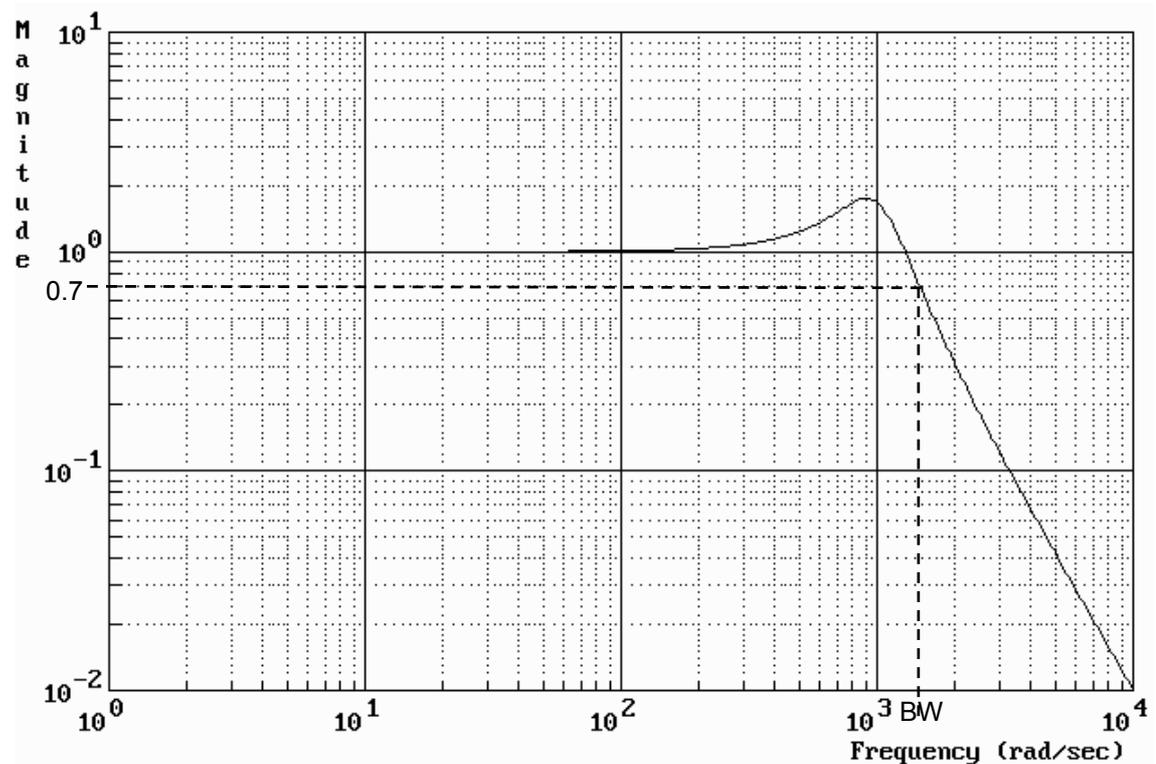
- Hay ciertos valores que son fáciles de determinar, como por ejemplo el valor nulo (blanco)
- Habitualmente se requiere disponer de muestras con valores bien conocidos (patrones).
- Normalmente se requiere disponer de un equipo calibrado de mayor precisión que proporciones el resultado de la medida buscado.
- Para ciertos niveles de precisión se requieren centros o laboratorios específicos de calibración (por ejemplo, CEM Centro Español de Metrología).

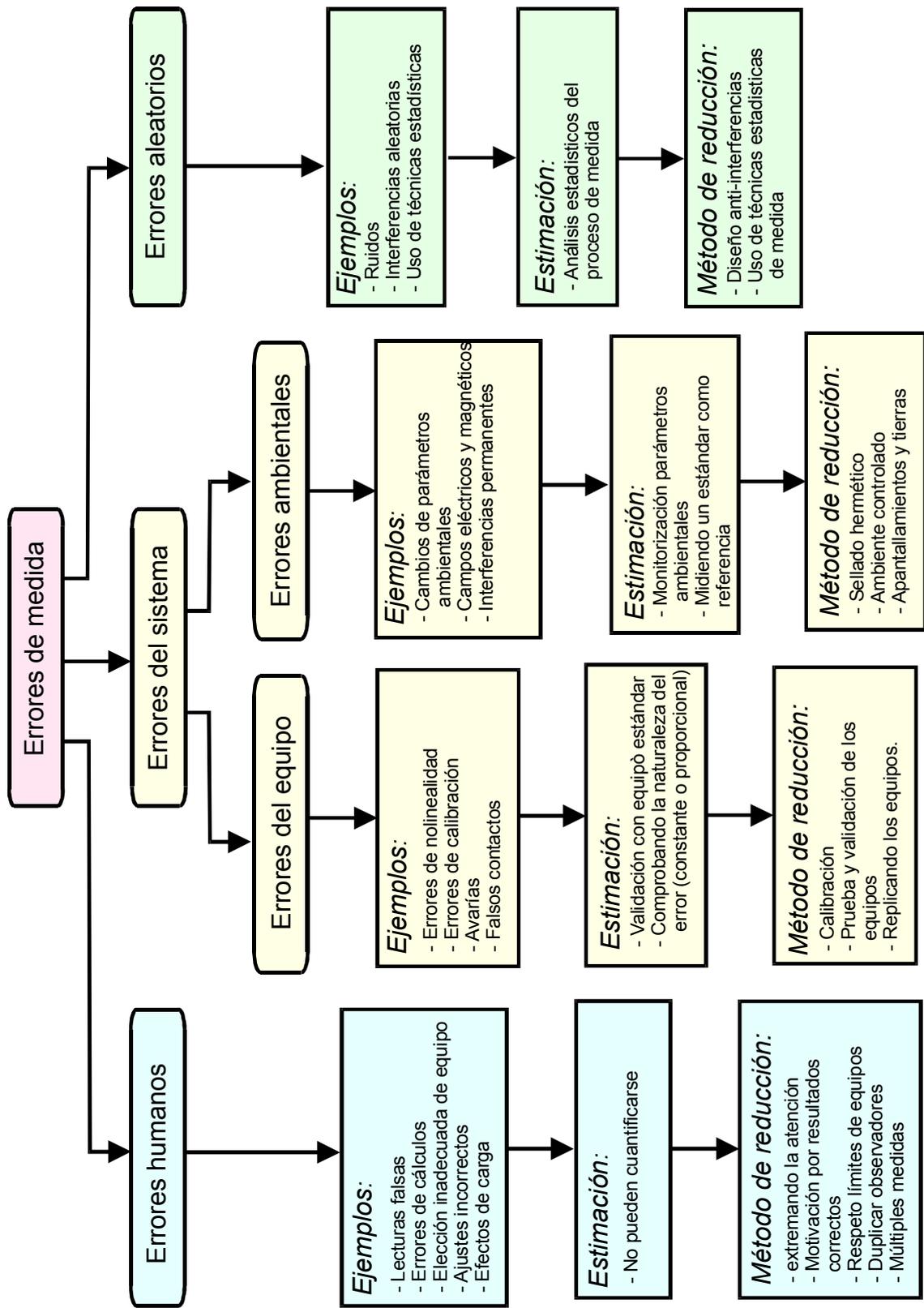
B. Comportamiento dinámico

El comportamiento dinámico de un instrumento caracteriza la dependencia que tiene la respuesta que se obtiene de él de la velocidad con la que la magnitud que se mide está cambiando.

La caracterización dinámica completa de un sistema lineal se realiza por su diagrama de respuesta frecuencial o diagrama de Bode. Sin embargo, no es habitual utilizar un instrumento como filtro frecuencial, por lo que su caracterización suele ser mas sencilla, solo se necesita caracterizar el rango de frecuencias en el que puede operar con una precisión determinada.

El parámetro de caracterización dinámica mas frecuente es la **anchura de banda** del instrumento (*bandwidth*), que establece la frecuencia para la que la respuesta a una señal sinusoidal cae 3 dB (0.7) respecto del valor de baja frecuencia (estático). Este parámetro es muy grosero y debe ser tenido en cuenta solo a efectos de orden de magnitud.





Existe un conjunto de términos que definen un instrumento en lo referente a la exactitud con que mide:

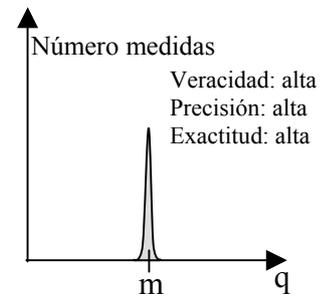
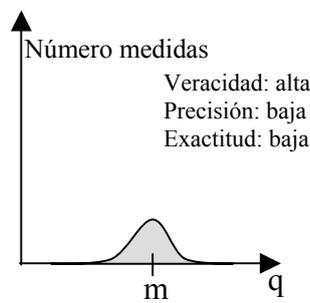
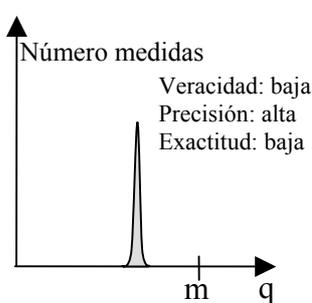
Veracidad (*trueness*): establece el grado de concordancia entre el valor medido por un equipo o proceso de medida y el valor verdadero que se obtiene mediante un procedimiento patrón. Habitualmente este término corresponde a la caracterización de la exactitud de un equipo de medida como consecuencia de sus errores sistemáticos, por ello, para su evaluación hay que utilizar métodos estadísticos que eliminen los errores aleatorios. La veracidad se suele expresar en terminos de sesgos o desviaciones.

Precisión (*precision*): establece el grado de acomodación o correlación dentro de un grupo de medidas del mismo valor. La precisión representa una medida de la capacidad de repetibilidad y reproducibilidad de las medidas por un instrumento:

- **Repetibilidad** (*repeatability*): establece la precisión de un instrumento cuando el conjunto de medidas de la misma magnitud se realiza de forma repetitiva y utilizando las mismas condiciones de medida. Las condiciones de repetibilidad incluyen:
 - El mismo procedimiento de medida.
 - El mismo criterios de lectura.
 - El mismo instrumento de medida utilizando las mismas condiciones.
 - El mismo sistema.
 - Medidas sucesivas con poco intervalo de tiempo entre ellas.
- **Reproducibilidad** (*reproducibility*): establece la precisión del proceso de medida cuando el conjunto de medidas se realiza bajo condiciones de medida cambiantes.

La precisión, la repitibilidad y la reproducibilidad se expresan cuantitativamente por medio de los parámetros estadísticos típicos de caracterización de la dispersión de valores.

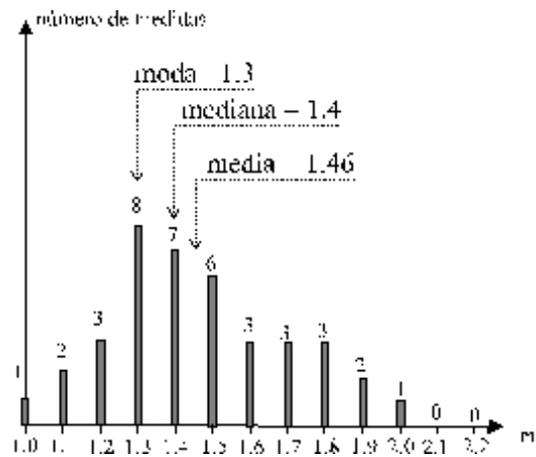
Exactitud (*accuracy*): Hace referencia tanto a la veracidad como a la precisión de un equipo de instrumentación. Define la concordancia de una medida respecto del valor verdadero de la magnitud que se mide, y es afectada tanto por los errores sistemáticos (veracidad) como por los errores aleatorios (precisión).



Magnitudes estadísticas relevantes de los procesos de medida.

Cuando se mide múltiples veces una misma magnitud m , se obtienen un conjunto valores con una cierta **distribución estadística** de valores (continua o discreta). En estos casos, se necesita caracterizar estadísticamente el resultado de la medida con dos objetivos:

- Estimar cual es el valor medido que debe estimarse como **mas representativo** de la medida.
- Caracterizar la dispersión de valores que han resultados, y en consecuencia informar sobre la falta de seguridad o **incertidumbre** que se deriva de ella.



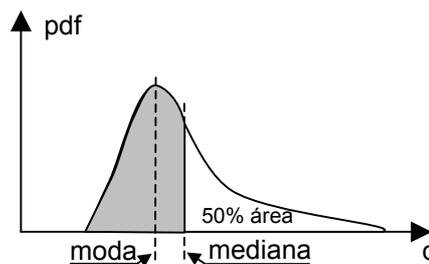
Magnitudes estadísticas para estimar el valor mas representativo

Valor medio (mean) de N medidas q_1 (n_1 ocurrencias), q_2 (n_2 ocurrencias),... , q_k (n_k ocurrencias), representa el valor que mejor representa al grupo de medida. Se calcula como,

$$\bar{q} = \frac{1}{N} \sum_{1 \leq i \leq k} n_i q_i \quad \bar{q} = \int_{-\infty}^{\infty} q p(q) dq \quad \text{siendo } p(q) \text{ la densidad espectral}$$

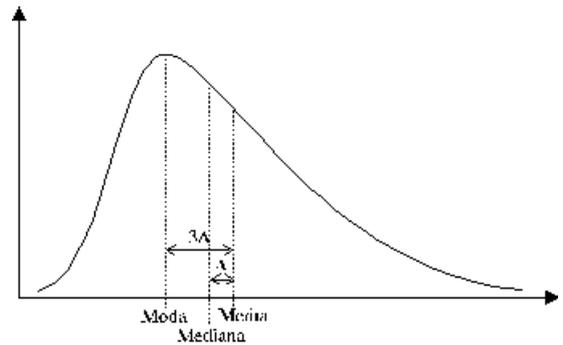
Mediana (median): de un conjunto de valores es el valor de la muestra que tiene tantos valores del conjunto por encima como por debajo de ella. Geométricamente la mediana es la medida que corresponde a la recta vertical que divide el histograma en dos partes de igual área.

Moda (mode): es el valor de la muestra que se presenta con mayor frecuencia (o tiene una densidad espectral máxima), lo que representa el valor más común en la medida. La moda puede no existir o incluso no ser única. Una distribución con moda única se denomina unimodal.

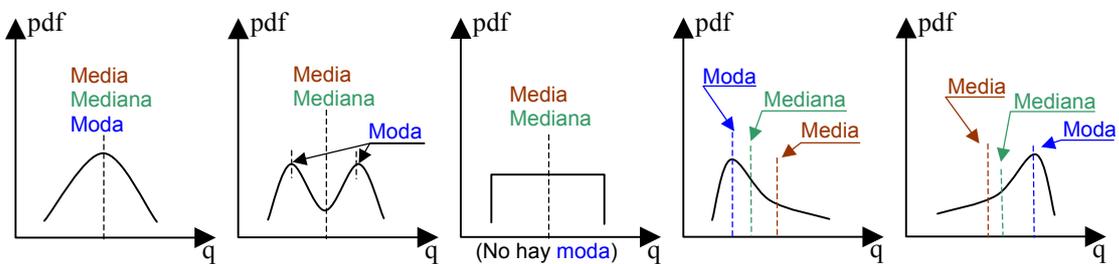


Para curvas de frecuencia unimodales y simétricas la media, la mediana y la moda coinciden. En curvas unimodales asimétricas, se suele verificar la siguiente relación empírica:

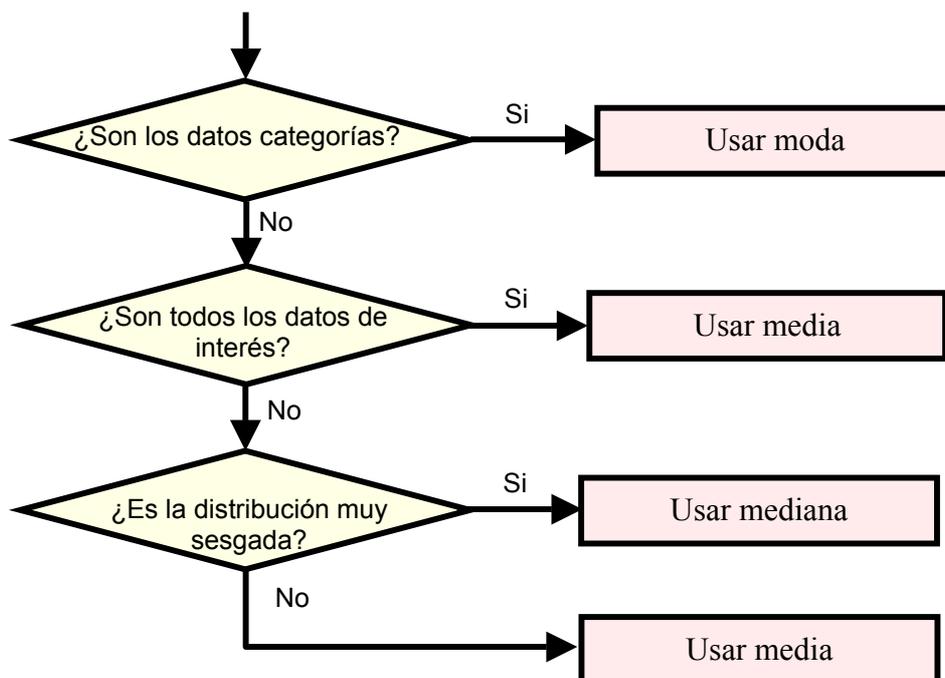
$$\text{Media} - \text{Moda} \approx 3 (\text{Media} - \text{Mediana})$$



En la siguiente figura se muestran las relaciones entre media, mediana y moda en diversos ejemplos de distribuciones características.



En el diagrama de flujo de la siguiente figura se muestran los criterios de comparación de los tres parámetros estadísticos de representación del valor más representativo en función de la naturaleza de la magnitud que se mide,



Magnitudes estadísticas para estimar la dispersión de valores

La dispersión de los valores de medida respecto del valor medio, se expresa con las siguientes magnitudes:

Rango (*range*): de un conjunto de datos es la diferencia entre el mayor y el menor de ellos

Desviación media es la media de las desviaciones de las diferentes medidas respecto del valor medio.

$$\bar{D} = \frac{1}{N} \sum |d_i| = \frac{\sum |q_i - \bar{q}|}{n}$$

Desviación estándar experimental (*Standard deviation*) representa la dispersión absoluta de los resultados de una medida obtenida a partir de una serie de mediciones de una misma magnitud. Corresponde a una desviación cuadrática media de un conjunto de N muestras. Se define como,

$$S = \sqrt{\frac{\sum (q_i - \bar{q})^2}{N-1}} = \sqrt{\sum p_i q_i} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} q f(q) dq} \quad \text{siendo } f(q) \text{ la función densidad de probabilidad}$$

Coefficiente de variación (*COV*) representa la dispersión relativa de los resultados de una medida obtenida a partir de una serie de mediciones de una misma magnitud. Corresponde a la desviación estándar normalizada por el valor medio de las medidas. Esto es,

$$V = \frac{S}{\bar{q}}$$

Cuando el valor de una medida se obtiene promediando un **grupo de N_g medidas**, la desviación estándar de los valores de la medida es,

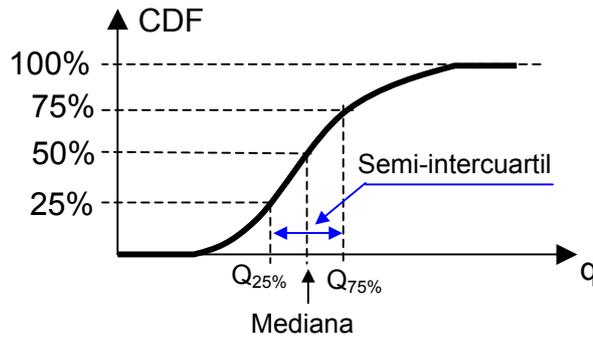
$$S_g = \frac{S}{\sqrt{N_g}}$$

Esta expresión es muy utilizada, ya que es habitual reducir la dispersión de los valores medidos haciendo un grupo de N_g medidas y considerando el valor medido como el valor medio de las diferentes medidas.

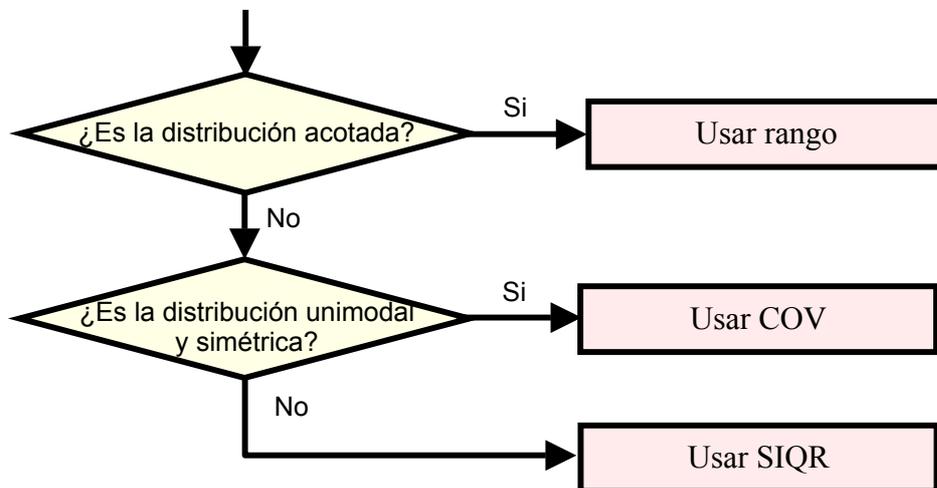
Semi-intercuartil (*Semi-interquartile*): es la mitad de la diferencia entre los semicuartiles $Q_{75\%}$ y $Q_{25\%}$

$$SIQR = \frac{Q_{75\%} - Q_{25\%}}{2}$$

Se denomina x-cuartil el valor de la magnitud para el que la función de distribución integrada toma el valor x.



En el siguientes diagrama de flujo se establecen los criterios de elección del parámetro estadístico adecuado para caracterizar la dispersión de valores, en función de la naturaleza de la distribución que se trate.

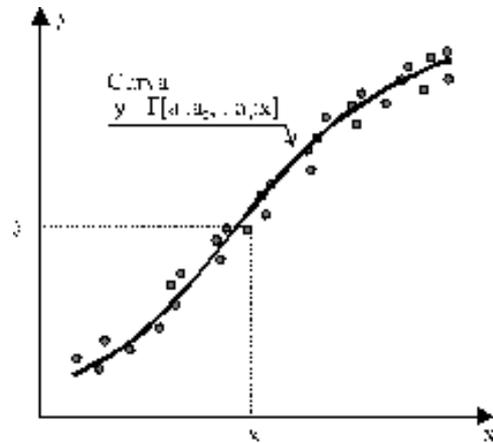


Análisis de correlación

Cuando se considera los errores aleatorios en la calibración de un equipo, se necesita estimar la curva de transferencia que mejor se ajusta a un conjunto de parejas estímulo respuesta que no son totalmente consistentes entre sí.

Para calibrar un equipo se realizan un conjunto relevante de medidas simultáneas de diferentes estímulos respuestas bajo diferentes situaciones del sistema. La representación de estos valores sobre un plano se denomina **diagrama de dispersión**.

El ajuste se plantea definiendo el modelo teórico al que debe ajustarse la curva de transferencia del equipo. Este modelo se formula en función de un conjunto de parámetros cuyo valor debe estimarse a fin de que se ajuste de forma óptima de acuerdo con una norma de distancia a la nube de medidas. A este proceso se denomina **análisis de regresión**.



Si se considera que la relación nominal que relacionan ambas magnitudes es del tipo

$$y = F(a_1, a_2, \dots, a_n; x)$$

y se buscan los valores de las constantes a_1, a_2, \dots, a_n , que mejor aproxima a la nube de valores medidos. La norma de distancia más habitual es la de **mínimos cuadrados**. Resolviendo un problema de mínimos de la función distancia S con respecto a cada uno de los parámetros,

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - F(a_1, a_2, \dots, a_n; x_i)]^2$$

resulta el sistema de n ecuaciones con n incógnitas,

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial a_1} &= 0 \\ \frac{\partial S}{\partial a_2} &= 0 \\ &\dots\dots\dots \\ \frac{\partial S}{\partial a_n} &= 0 \end{aligned}$$

Las constantes a_1, a_2, \dots, a_n se obtienen resolviendo este sistema de ecuaciones.

Regresión lineal.

Cuando el modelo estímulo respuesta es de tipo lineal, el problema se plantea buscando la ecuación de la recta que mejor aproxima la nube de puntos, y a este proceso se denomina **regresión lineal**. La solución del sistema de ecuaciones para los parámetros a y b, son en este caso,

$$y = a x + b$$

$$a = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$b = \frac{(\sum y_i)(\sum x_i^2) - (\sum x_i y_i)(\sum x_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$r = \frac{n \sum x_i y_i - (\sum x_i)(\sum y_i)}{\sqrt{(n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2)(n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}}$$

siendo r el **coeficiente de correlación** que indica si la aproximación por la recta es fiable ($0.8 < r < 1$), no es fiable ($r < 0.8$) o no están correlacionados ($r = 0$).

La regresión lineal se puede utilizar para aproximar muchas otras ecuaciones no lineales, que son susceptibles de ser transformadas en lineales mediante simples transformación de los datos de medida. En la siguiente tabla se muestran algunas de estas funciones.

Función	Expresión	Expresión transformada
Hipérbola	$Y = 1 / (a + b X)$	$(1/Y) = a + b X$
Geométrica	$Y = a X^b$	$(\log Y) = a + b (\log X)$
Exponencial	$Y = p q^X$	$(\log Y) = (\log p) + (\log q) X = a + b X$

Si la variable independiente X es el tiempo, los valores Y representan la evolución de una variable a lo largo de diferentes instantes de tiempo y se denominan **serie temporales**. La recta o curva de regresión de Y sobre t se llama **recta o curva de de tendencia**, y se utiliza en los procesos de predicción.

Regresión polinómica

Si el modelo estímulo respuesta es de naturaleza polinómica,

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n$$

El proceso de regresión se puede resolver explícitamente y su solución puede encontrarse en la bibliografía.

En el caso parabólico $n=2$

$$Y = a_0 + a_1X + a_2X^2$$

Los tres parámetros a_0 , a_1 y a_2 pueden estimarse resolviendo el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}\sum Y_i &= a_0N + a_1\sum X_i + a_2\sum X_i^2 \\ \sum X_iY_i &= a_0\sum X_i + a_1\sum X_i^2 + a_2\sum X_i^3 \\ \sum X_i^2Y_i &= a_0\sum X_i^2 + a_1\sum X_i^3 + a_2\sum X_i^4\end{aligned}$$

1.5 CALCULO DE LA INCERTIDUMBRE DE UNA MEDIDA.

La incertidumbre es un parámetro que debe asociarse a cualquier medida para caracterizar la dispersión de los valores que razonablemente pueden atribuirse a la magnitud que se mide. La incertidumbre es un elemento fundamental de toda medida a fin de delimitar su grado de validez.

Siempre que se realiza una medición se considera que se lleva a cabo con la mejor estimación posible y que la incertidumbre que se le asocia proviene de efectos aleatorios, tales como los componentes asociados a correcciones, a las incertidumbres de los parámetros que afectan, de los patrones que se utilizan, etc.

El resultado final de una medida Y se expresa como la mejor estima del valor de la magnitud que se mide Y_c , junto con el intervalo de incertidumbre que resulta I , y la indicación del nivel de confianza que se utiliza k .

$$Y = Y_c \pm I (k)$$

Cuando el proceso de medida es simplemente la realización de una medida singular Y_m ($N_m=1$),

$$Y_c = Y_m$$

Si el proceso de medida consiste en la realización de N_m medidas Y_i , el mejor valor estimado Y_c , habitualmente es el valor medio de las medidas realizadas,

$$Y_c = \bar{Y} = \frac{1}{N_m} \sum_{i=1}^{N_m} Y_i$$

La incertidumbre de una medida se caracteriza cuantitativamente por una desviación estándar, o un múltiplo de esta que corresponde a la semiamplitud de un intervalo con un nivel de confianza preestablecido.

$$I = \pm k U$$

siendo U la desviación estándar global que corresponde a la composición de las diferentes componentes que aportan incertidumbre a la medida, y k el factor de incertidumbre, que indica el nivel de confianza con la que se expresa la incertidumbre, de acuerdo con la tabla adjunta. Lo normal es utilizar un nivel de confianza del 95%, o lo que es lo mismo, $k=2$.

k	Confianza
1	66%
2	95%
3	99%

Así, si el resultado de una medida es,

$$Y = 4.33 \pm 0.2 \quad (k=2)$$

significa que el valor medido es 4.33 y que el valor verdadero se encuentra entre 4.13 y 4.53, con una confianza del 95%.

Habitualmente la incertidumbre es consecuencia de muchas de las componentes que influyen sobre el proceso de medida. La incertidumbre global de una medida se ha definido anteriormente en función de la varianza equivalente, y esta, se puede a su vez calcular a partir de las varianzas equivalentes de sus componentes usando el método usual de combinación de las varianzas.

Considérese que una medida Y es función de un conjunto de componentes (parámetros, condiciones de medida o criterios de observación, etc.) x_1, x_2, \dots, x_N que la afectan y que a su vez, tienen unas varianzas en sus valores U_1, U_2, \dots, U_N .

$$Y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

La incertidumbre U_Y^2 total puede evaluarse como,

$$U_Y^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 U_i^2 + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \lambda_i \lambda_j \text{cov}(\bar{x}_i, \bar{x}_j)$$

siendo,

$$\lambda_i = \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)_{x_i}$$

$$\text{cov}(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \rho_{ij} U_i U_j = \frac{\sum_{k=1}^m (x_{ik} - \bar{x}_i)(x_{jk} - \bar{x}_j)}{m(m-1)}$$

donde ρ_{ij} es el coeficiente de correlación que siempre se encuentra entre -1 y +1. La segunda expresión de la covarianza se puede evaluar si se disponen de m pares de valores de las variables x_i y x_j tomados simultáneamente.

En el caso de que las variables x_1, x_2, \dots, x_N sean independientes entre sí, las correspondientes covarianzas son nulas, y la expresión de la incertidumbre global se reduce a ,

$$U_Y^2 = \sum_{i=1}^N \lambda_i^2 U_i^2$$

En función de la naturaleza de cada componente, y de la información que sobre sus valores se dispone, se evalúa la varianza de los mismos utilizando uno de los dos siguientes métodos:

- 1) Componentes de las que se dispone información estadística. Cuando las componentes se pueden medir, o se dispone de series de valores medidos de ellas, se evalúan directamente las varianzas de las series de valores. Las componentes estadísticas se caracterizan por la varianzas estimadas s_i^2 (o por las correspondientes desviaciones típicas s_i), los números de grados de libertad v_i , y en el caso de que las diferentes componentes estén relacionadas entre sí, por las covarianzas que correspondan.

Así, si para la componente x_i , se disponen de n_i medidas $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{ini}$, la varianza de la componente se puede calcular como,

$$s_i^2 = \frac{1}{n_i - 1} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2$$

En el caso de que la estimación resulte de realizar N_m medidas, debe utilizarse la varianza media, calculada como,

$$s_i'^2 = \frac{s_i^2}{N_m} = \frac{1}{N_m (n_i - 1)} \sum_{k=1}^{n_i} (x_{ik} - \bar{x}_i)^2$$

Factor multiplicativo w para k=2

Nº de lecturas n_i	Factor corrector w
2	7.0
3	2.3
4	1.7
5	1.4
6	1.3
7	1.3
8	1.2
9	1.2
10 o más	1

La componente de incertidumbre U_i se evalúa corrigiendo la varianza media con el factor w, derivado de la distribución t de Student que corrige el efecto de que el número de muestras de la serie n_i sea pequeño.

$$U_i = w s_i'$$

- 2) Otras componentes que por su naturaleza o por no disponer series de medidas de ellas deben utilizarse otros métodos heurísticos no estadísticos. Estas componentes se caracterizan por unos términos u_i^2 que se obtienen utilizando reglas heurísticas función de la naturaleza de las componentes. Los términos u_i^2 pueden ser considerados como estimaciones de las varianzas que corresponden a estas componentes, y los términos u_i como desviaciones típicas.

Criterios de estimación de las componentes en función de su naturaleza o de la información que sobre ellas se disponga son:

- 2.a) Si no se dispone de ninguna información, se estimará la incertidumbre máxima de la componente y se evalúa su contribución U_i como:

$$U_i = \frac{\text{Incertidumbre máxima de la componente}}{\sqrt{3}}$$

- 2.b) Se dispone de un certificado de calibración para la componente, en el que se establece su incertidumbre para un nivel de confianza k . En este caso se evalúa su contribución como,

$$U_i = \frac{\text{Incertidumbre certificada}}{k}$$

- 2.c) El fabricante establece la exactitud de la componente, definida como la máxima variación de su valor a lo largo de un tiempo establecido.

$$U_i = \frac{\text{Exactitud de la componente}}{\sqrt{3}}$$

- 2.d) El fabricante establece la repetibilidad o resolución de la componente, definida como una desviación estándar asociada a sucesivas medidas hechas en un corto plazo de tiempo.

$$U_i = \frac{\text{Desviación estándar de la componente}}{\sqrt{3}}$$

- 2.f) Inestabilidad del parámetro definida como variaciones del valor que se obtiene en sucesivas medidas. En estos casos se considera como componente U_i ,

$$U_i = \frac{\text{Rango en el que fluctúa la componente}}{2\sqrt{3}}$$

La estimación de la incertidumbre de una medida es un proceso abierto a diferentes interpretaciones y en consecuencia no exacta, por ello es muy importante disponer siempre un procedimiento que explique las componentes que se han considerado así como el criterio de cálculo de su influencia que se ha utilizado.

REFERENCIAS

Relativas a estructura y componentes de la instrumentación.

- [MAZ87] MAZDA F.F.: "Electronic Instruments and measurement techniques" Cambridge, 1987.
- [MOR88] MORRIS A.S.: "Principles of Measurement and Instrumentation". Prentice Hall, 1988
- [BAR88] BARNEY G.C.: "Intelligent Instrumentation: Microprocessor Applications in Measurement and Control" Prentice Hall, 1988.
- [HAS81] HASLAM J.A., SUMMERS G.R. y WILLIAMS D.: "Engineering Instrumentation and Control". Edward Arnold, 1981.

Relativas a tratamiento e interpretación de datos adquiridos.

- [BRO88] RONSHTEIN I. y SEMENDIALEV K.: "Manual de matemáticas para ingenieros". Ed. Mir, Moscú, 1988.
- [SPI91] SPIEGEL M.R.: "Estadística (Serie Schaum)". Mc Graw Hill, 1991.
- [BEC93] BECKWITH T.G., MARANGONI R.D. y LIENHARD J.H.: "Mechanical Measurements", Addison Wesley, 1993.