ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS INDUSTRIALES
Y DE TELECOMUNICACION

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

# INSTRUMENTACION ELECTRÓNICA DE COMUNICACIONES

## (5º Curso Ingeniería de Telecomunicación)

# Tema I: Introducción a los sistemas de instrumentación
# (Ejercicios resueltos)

José María Drake Moyano
Dpto. de Electrónica y Computadores
Santander, 2005

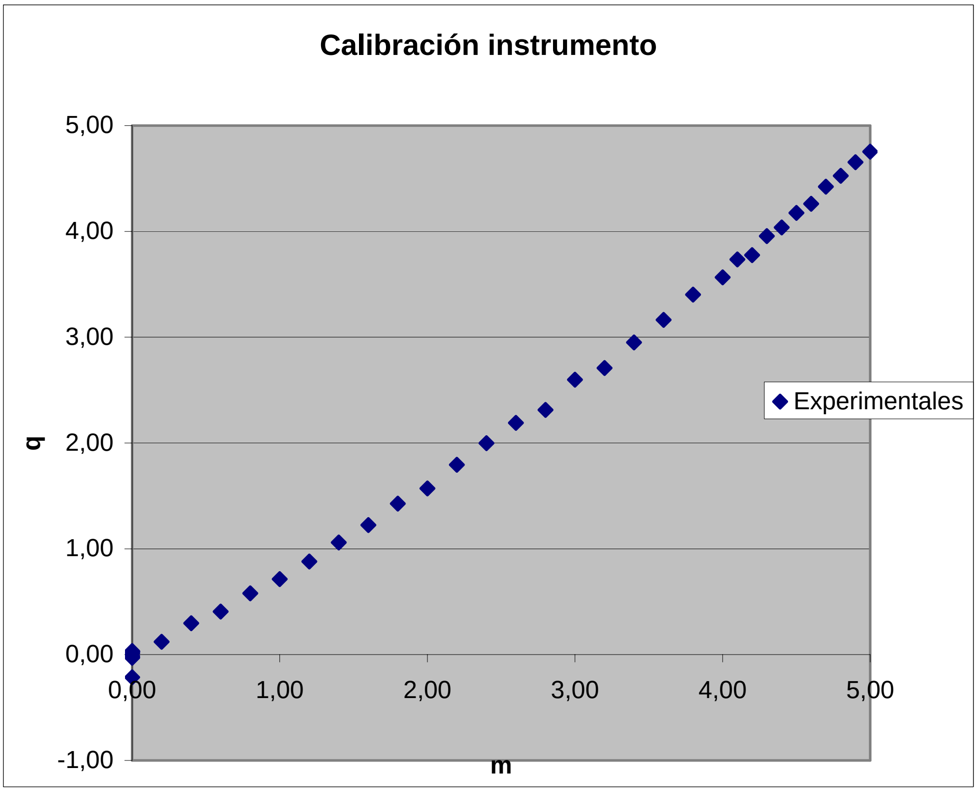
## Ejemplo 1: Linealidad de un sistema caracterizado experimentalmente.

Se dispone de un instrumento que permite medir una magnitud q en el rango 0 – 5. Se realizan 40 medidas utilizando instrumento de calibrado que se considera ideal.

Para este sistema determinar:

1) La linealidad que presenta
2) La veracidad
3) El umbral
4) La resolución para m=4,5

| # | m | q | # | m | q | # | m | q | # | m | q |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 0,0109 | 11 | 0,20 | 0,1207 | 21 | 2,20 | 1,7951 | 31 | 4,10 | 3,7353 |
| 2 | 0,00 | 0,0272 | 12 | 0,40 | 0,2971 | 22 | 2,40 | 1,9978 | 32 | 4,20 | 3,7752 |
| 3 | 0,00 | 0,0340 | 13 | 0,60 | 0,4072 | 23 | 2,60 | 2,1901 | 33 | 4,30 | 3,9559 |
| 4 | 0,00 | -0,0129 | 14 | 0,80 | 0,5789 | 24 | 2,80 | 2,3128 | 34 | 4,40 | 4,0379 |
| 5 | 0,00 | -0,2140 | 15 | 1,00 | 0,7137 | 25 | 3,00 | 2,5988 | 35 | 4,50 | 4,1743 |
| 6 | 0,00 | 0,0207 | 16 | 1,20 | 0,8797 | 26 | 3,20 | 2,7082 | 36 | 4,60 | 4,2612 |
| 7 | 0,00 | 0,0310 | 17 | 1,40 | 1,0602 | 27 | 3,40 | 2,9505 | 37 | 4,70 | 4,4222 |
| 8 | 0,00 | -0,0294 | 18 | 1,60 | 1,2252 | 28 | 3,60 | 3,1636 | 38 | 4,80 | 4,5250 |
| 9 | 0,00 | 0,0273 | 19 | 1,80 | 1,4272 | 29 | 3,80 | 3,4027 | 39 | 4,90 | 4,6540 |
| 10 | 0,00 | -0,0247 | 20 | 2,00 | 1,5707 | 30 | 4,00 | 3,5659 | 40 | 5,00 | 4,7533 |



## a) Error de linealidad

Se obtiene la recta de regresión de los datos:

$$q = a\,m + b = -0.1127 + 0.9330\,m$$

$$a = \frac{n\sum m_i q_i - \left(\sum m_i\right)\left(\sum q_i\right)}{n\sum m_i^2 - \left(\sum m_i\right)^2} = 0.9330$$

$$b = \frac{\left(\sum q_i\right)\left(\sum m_i^2\right) - \left(\sum m_i q_i\right)\left(\sum m_i\right)}{n\sum m_i^2 - \left(\sum m_i\right)^2} = -0.1127$$

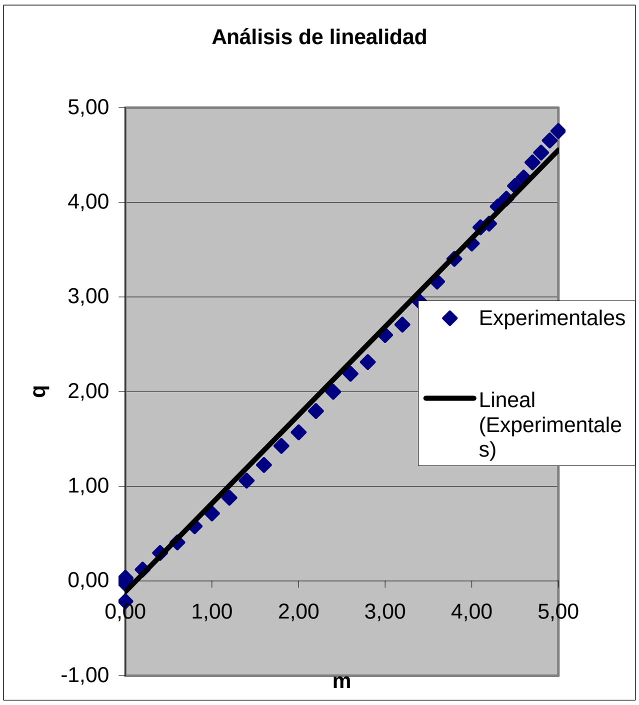
$$R = \frac{n\sum m_i q_i - \left(\sum m_i\right)\left(\sum q_i\right)}{\sqrt{\left(n\sum m_i^2 - \left(\sum m_i\right)^2\right)\left(n\sum q_i^2 - \left(\sum q_i\right)^2\right)}} = 0.995$$

El error de linealidad

$$\Delta_{linealidad} = máximo\left|m_i - m_{lineal}(q_i)\right| = máximo\left|m_i - \frac{q_i - b}{a}\right| = 0.4819$$

$$\%_{linealidad} = \frac{\Delta_{linealidad}}{FSC} = 100\,\frac{0.4819}{5} = 9.64\%\ \mathrm{FSC}$$

| m | q | e | m | q | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0109 | 0,1414 | 2,20 | 1,7951 | 0,2695 |
| 0,00 | 0,0272 | 0,1425 | 2,40 | 1,9978 | 0,2840 |
| 0,00 | 0,0340 | 0,1430 | 2,60 | 2,1901 | 0,2978 |
| 0,00 | -0,0129 | 0,1397 | 2,80 | 2,3128 | 0,3066 |
| 0,00 | -0,2140 | 0,1252 | 3,00 | 2,5988 | 0,3272 |
| 0,00 | 0,0207 | 0,1421 | 3,20 | 2,7082 | 0,3350 |
| 0,00 | 0,0310 | 0,1428 | 3,40 | 2,9505 | 0,3524 |
| 0,00 | -0,0294 | 0,1385 | 3,60 | 3,1636 | 0,3677 |
| 0,00 | 0,0273 | 0,1425 | 3,80 | 3,4027 | 0,3849 |
| 0,00 | -0,0247 | 0,1388 | 4,00 | 3,5659 | 0,3966 |
| 0,20 | 0,1207 | 0,1492 | 4,10 | 3,7353 | 0,4088 |
| 0,40 | 0,2971 | 0,1619 | 4,20 | 3,7752 | 0,4116 |
| 0,60 | 0,4072 | 0,1698 | 4,30 | 3,9559 | 0,4246 |
| 0,80 | 0,5789 | 0,1821 | 4,40 | 4,0379 | 0,4305 |
| 1,00 | 0,7137 | 0,1918 | 4,50 | 4,1743 | 0,4403 |
| 1,20 | 0,8797 | 0,2037 | 4,60 | 4,2612 | 0,4465 |
| 1,40 | 1,0602 | 0,2167 | 4,70 | 4,4222 | 0,4581 |
| 1,60 | 1,2252 | 0,2285 | 4,80 | 4,5250 | 0,4655 |
| 1,80 | 1,4272 | 0,2431 | 4,90 | 4,6540 | 0,4747 |
| 2,00 | 1,5707 | 0,2534 | 5,00 | 4,7533 | 0,4819 |



**b) Exactitud del equipo**

El comportamiento teórico del equipo es

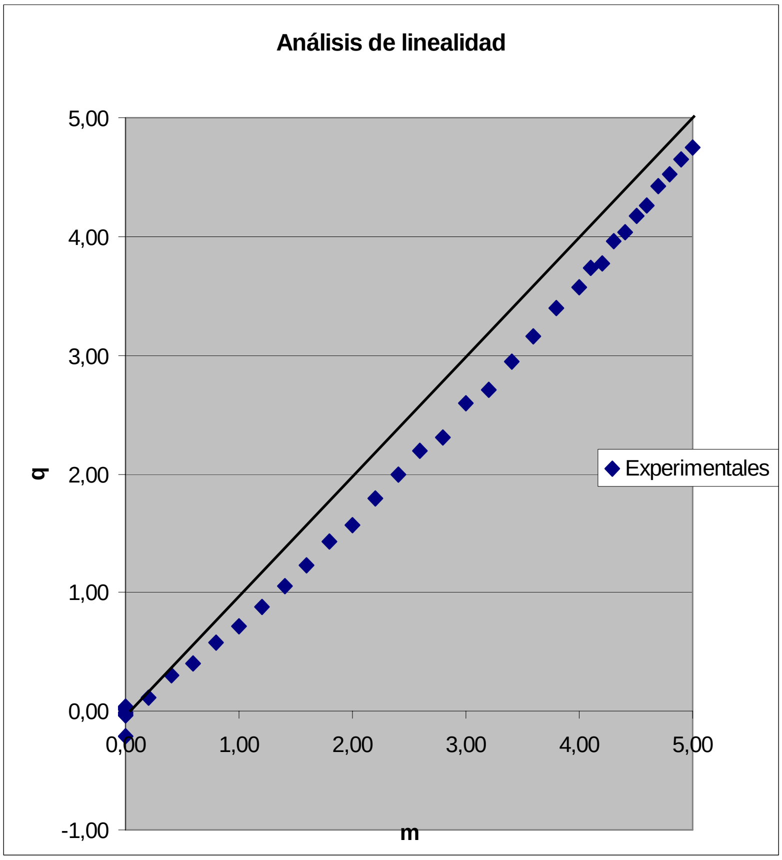
$$q = m$$

por tanto el error de exactitud es

$$\Delta_{exactitud} = máximo\left|q_i - m_i\right| = 0.498$$

$$\%exactitud = 100\frac{\Delta_{exactitud}}{FSC} = 9.84\%$$

| m | q | e | m | q | e |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,00 | 0,0109 | 0,0109 | 2,20 | 1,7951 | 0,4049 |
| 0,00 | 0,0272 | 0,0272 | 2,40 | 1,9978 | 0,4022 |
| 0,00 | 0,0340 | 0,0340 | 2,60 | 2,1901 | 0,4099 |
| 0,00 | -0,0129 | 0,0129 | 2,80 | 2,3128 | 0,4872 |
| 0,00 | -0,2140 | 0,2140 | 3,00 | 2,5988 | 0,4012 |
| 0,00 | 0,0207 | 0,0207 | 3,20 | 2,7082 | 0,4918 |
| 0,00 | 0,0310 | 0,0310 | 3,40 | 2,9505 | 0,4495 |
| 0,00 | -0,0294 | 0,0294 | 3,60 | 3,1636 | 0,4364 |
| 0,00 | 0,0273 | 0,0273 | 3,80 | 3,4027 | 0,3973 |
| 0,00 | -0,0247 | 0,0247 | 4,00 | 3,5659 | 0,4341 |
| 0,20 | 0,1207 | 0,0793 | 4,10 | 3,7353 | 0,3647 |
| 0,40 | 0,2971 | 0,1029 | 4,20 | 3,7752 | 0,4248 |
| 0,60 | 0,4072 | 0,1928 | 4,30 | 3,9559 | 0,3441 |
| 0,80 | 0,5789 | 0,2211 | 4,40 | 4,0379 | 0,3621 |
| 1,00 | 0,7137 | 0,2863 | 4,50 | 4,1743 | 0,3257 |
| 1,20 | 0,8797 | 0,3203 | 4,60 | 4,2612 | 0,3388 |
| 1,40 | 1,0602 | 0,3398 | 4,70 | 4,4222 | 0,2778 |



**c) Calculo del umbral del instrumento**

Se consideran sólo las medidas que corresponden a magnitud nula.

Se calcula la dispersión de los valores obtenidos para la entrada nula (blanco), caracterizándola mediante la desviación media.

$$\bar{q} = \frac{\sum q_i}{N} = -0.0130$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (q_i - \bar{q})^2}{N-1}} = 0.074$$

U= 3 σ = 0.222

| m | q |
|---|---|
| 0,00 | 0,0109 |
| 0,00 | 0,0272 |
| 0,00 | 0,0340 |
| 0,00 | -0,0129 |
| 0,00 | -0,2140 |
| 0,00 | 0,0207 |
| 0,00 | 0,0310 |
| 0,00 | -0,0294 |
| 0,00 | 0,0273 |
| 0,00 | -0,0247 |

**d) Calculo de la resolución para m=4.5**

Se consideran sólo las medidas que corresponden a m=4.5. Pero en este caso sólo hay una medida de este valor.

Extrapolamos los valores próximos al valor m=4.5 haciendo uso de la aproximación lineal obtenida en a): q=am+b=0.9330 m -0.1127.

$$b_i = q_i - a\, m_i = q_{i\ extrapolado} - a\ 4.5 \quad => \quad q_{i\ extrapolado} = q_i - a(m_i - 4.5)$$

$$\bar{q} = \frac{\sum q_i}{N} = 4.169$$

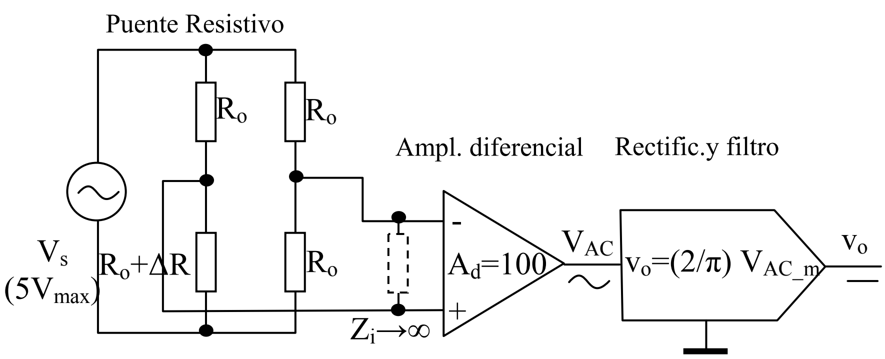
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (q_i - \bar{q})^2}{N-1}} = 0{,}0861$$

U= 3 σ = 0.258

| m | q | m | $q_{extrapolado}$ |
|---|---|---|---|
| 4,00 | 3,5659 | 4,5 | 4,0324 |
| 4,10 | 3,7353 | 4,5 | 4,1085 |
| 4,20 | 3,7752 | 4,5 | 4,0551 |
| 4,30 | 3,9559 | 4,5 | 4,1425 |
| 4,40 | 4,0379 | 4,5 | 4,1312 |
| 4,50 | 4,1743 | 4,5 | 4,1743 |
| 4,60 | 4,2612 | 4,5 | 4,1679 |
| 4,70 | 4,4222 | 4,5 | 4,2356 |
| 4,80 | 4,5250 | 4,5 | 4,2451 |
| 4,90 | 4,6540 | 4,5 | 4,2808 |
| 5,00 | 4,7533 | 4,5 | 4,2868 |

**Ejemplo 2: Linealidad de un circuito electrónico.**

Un sistema de medida se basa en un transductor resistivo que ofrece una variación de la resistencia proporcional a la magnitud a la que es sensible. En el rango en que opera la variación máxima de ΔR es del 2% de $R_o$.




Determinar la relación $v_o$-ΔR del circuito del sistema de medida, así como el tanto por ciento de linealidad que presenta.

**Solución:**

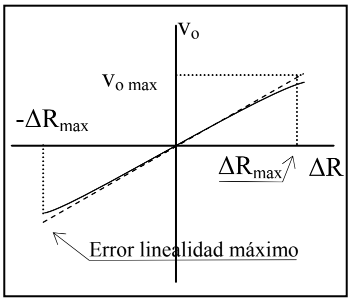
Relación $v_o$-ΔR:

$$v_o = \frac{2A_d V_{s\max}}{\pi}\left[\frac{R_o+\Delta R}{2R_o+\Delta R}-\frac{1}{2}\right] = \frac{2A_d V_{s\max}}{\pi}\frac{\Delta R}{2R_o+\Delta R} = \frac{A_d V_{s\max}\Delta R}{\pi R_o}\left[1-\frac{\Delta R}{2R_o+\Delta R}\right]$$

El comportamiento lineal es:

$$v_o = \frac{A_d V_{s\max}}{\pi R_o}\Delta R \quad \Rightarrow \begin{array}{l} si\ \Delta R = 0 \rightarrow v_o = 0V \\ si\ \Delta R = 0.02R_o \rightarrow v_o = \dfrac{0.02V_{s\max}A_d}{\pi} = \dfrac{10}{\pi}V \\ si\ \Delta R = -0.02R_o \rightarrow v_o = -\dfrac{0.02V_{s\max}A_d}{\pi} = -\dfrac{10}{\pi}V \end{array}$$

El tanto por ciento de linealidad normalizado por el fondo de escala es:




$$\%Linealidad = \frac{(\Delta v_o)_{\max}}{v_{o\max}} = 100\frac{\Delta R_{\max}}{2Ro-\Delta R_{\max}} = 1.01\%$$

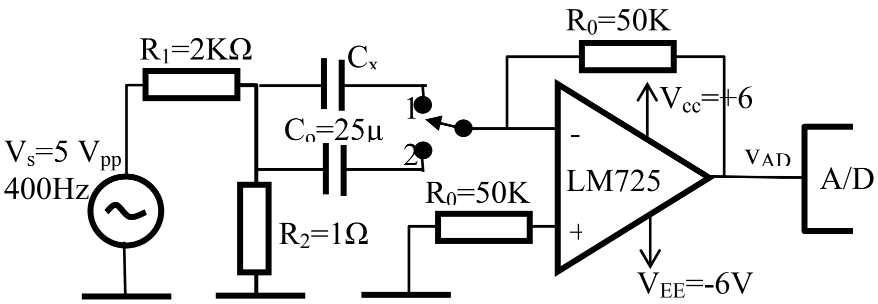
**Ejemplo 3: Linealidad de un sistema de medida.**

Se propone el sistema experimental de la figura para automatizar la medida de la capacidad del condensador $C_x$, a una frecuencia de 400 Hz. La capacidad de los condensadores que se miden, se encuentra en el rango de de 25 μF ±20%.

El circuito utiliza un condensador patrón $C_o$=25 μF para conseguir que las medidas sean independientes de los errores en la amplitud de la señal de alimentación, de la frecuencia y de las resistencias del circuito. El proceso de medida consiste en muestrear durante un segundo y a una frecuencia de 6400Hz la señal con el conmutador en posición 1 ($C_x$ conectado) y posteriormente la señal con el conmutador en posición 2 ($C_o$ conectado). La muestra de mayor valor de cada registro $V_{mx}$ y $V_{mo}$, se toma como las amplitudes de la señal de salida en ambas situaciones, y en función de ellas se mide la capacidad como:

$$C_x = C_o \frac{V_{mx}}{V_{mo}}$$

Las resistencias han sido calculadas para que las señales que se generan estén en unos rangos adecuados.

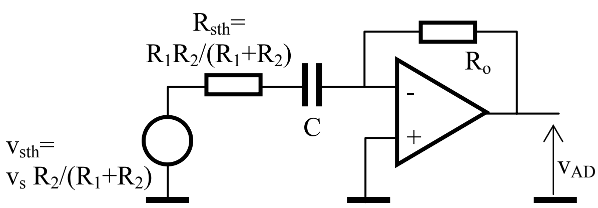



Determinar la linealidad de este sistema suponiendo que todos los elementos tienen un comportamiento ideal.

**Solución:**

Calculamos la expresión exacta que se deriva del proceso de medida de capacidad descrita.

Aplicando Theveneen al divisor de tensión de entrada (R1 y R2) el circuito resulta:




El fasor complejo de la señal de salida $V_o(jw)$ es

$$V_o(jw) = V_{sth}(jw)\frac{R_o}{R_{sth} + \frac{1}{jwC}}$$

La amplitud de la señal en la salida del A.O. es

$$V_m = \left|V_o(jw)\right| = V_{msth}\,\frac{R_o w C}{\sqrt{R_{sth}^2 C^2 w^2 + 1}}$$

De acuerdo con el proceso de medida descrito, el valor del condensador $C_x$ que se mide es:

$$\frac{V_{mx}}{V_{mo}} = \frac{C_x}{C_o}\,\frac{\sqrt{R_{sth}^2 C_o^2 w^2 + 1}}{\sqrt{R_{sth}^2 C_x^2 w^2 + 1}} \quad \Rightarrow \quad C_x = C_o \frac{V_{mx}}{V_{mo}}\,\frac{\sqrt{R_{sth}^2 C_x^2 w^2 + 1}}{\sqrt{R_{sth}^2 C_o^2 w^2 + 1}} = C_o \frac{V_{mx}}{V_{mo}}\left[1 + \left(\frac{\sqrt{R_{sth}^2 C_x^2 w^2 + 1}}{\sqrt{R_{sth}^2 C_o^2 w^2 + 1}} - 1\right)\right]$$

luego el error de linealidad respecto del valor que se estima es,

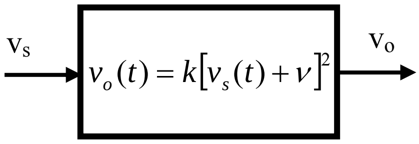
$$\%error\ linealidad = 100\left(\frac{\sqrt{R_{sth}^2 C_x^2 w^2 + 1}}{\sqrt{R_{sth}^2 C_o^2 w^2 + 1}} - 1\right) \approx 100 \times \frac{1}{2} R_{sth}{}^2 w^2 \left(C_x^2 - C_o^2\right)$$

El error de linealidad del proceso de medida es el máximo de estos errores de linealidad para los diferentes valores de los condensadores en el rango previsto 25μF±20%,

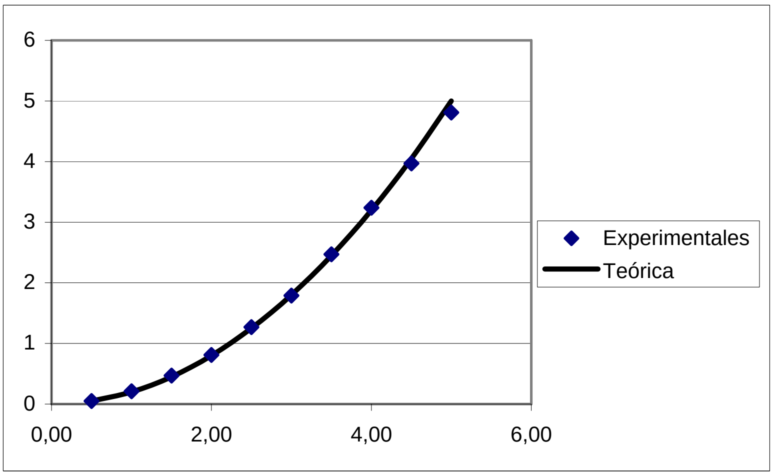
$$\%Error\ linealidad = 100 \times \frac{1}{2} \times 1^2 \times \left(2 \times \pi \times 400\right)^2 \times \left(\left(30\,10^{-6}\right)^2 - \left(25\,10^{-6}\right)^2\right) = 0.86\%$$

**Ejemplo 4: Calibración por regresión lineal de un bloque cruadrático.**

Un módulo proporciona como salida el cuadrado de la señal de entrada. Se calibra realizando 10 medidas de las que se obtienen la medidas de la tabla. Estimar los valores de los dos parámetros k y υ, de acuerdo con el criterio de mínimo error cuadrático medio.




| $v_s$ | $v_o$ |
|---|---|
| 0,50 | 0,05 |
| 1,00 | 0,21 |
| 1,50 | 0,47 |
| 2,00 | 0,81 |
| 2,50 | 1,27 |
| 3,00 | 1,79 |
| 3,50 | 2,47 |
| 4,00 | 3,24 |
| 4,50 | 3,97 |
| 5,00 | 4,81 |




**Solución 1:** Sistema s determinista y utilizando sólo las medidas extremas.

$$v_s = 0.5 \quad \Rightarrow v_o = 0{,}05 \quad \Rightarrow 0.05 = k[0.5 + v]^2 \quad \Rightarrow k = 0.19$$

$$v_s = 5.0 \quad \Rightarrow v_o = 4{,}80 \quad \Rightarrow 4.80 = k[5.0 + v]^2 \quad \Rightarrow v = 0.011$$

Este método no es robusto, solo utiliza dos de las medidas y los resultados son directamente afectados por

**Solución 2:** Utilizando regresión lineal
Se transforma la ecuación en ecuación lineal.

$$v_o = k[v_s + v]^2 \quad \Rightarrow \sqrt{v_o} = \sqrt{k}[v_s + v] = a\, v_s + b$$

Calculando a y b por regresión lineal de los datos $v_o^{1/2}$ frente a $v_s$

$$a = \frac{n\sum v_{si}\sqrt{v_{0i}} - \left(\sum s_{si}\right)\left(\sum \sqrt{v_{oi}}\right)}{n\sum v_{si}^2 - \left(\sum v_{si}\right)^2} = 0.439$$

$$b = \frac{\left(\sum \sqrt{v_{oi}}\right)\left(\sum v_{si}^2\right) - \left(\sum v_{si}\sqrt{v_{oi}}\right)\left(\sum v_{si}\right)}{n\sum v_{si}^2 - \left(\sum v_{si}\right)^2} = -0.021$$

| $v_s$ | $v_o$ | $v_o^{1/2}$ |
|---|---|---|
| 0,50 | 0,05 | 0,2236 |
| 1,00 | 0,21 | 0,4583 |
| 1,50 | 0,47 | 0,6856 |
| 2,00 | 0,81 | 0,9000 |
| 2,50 | 1,27 | 1,1269 |
| 3,00 | 1,79 | 1,3379 |
| 3,50 | 2,47 | 1,5716 |
| 4,00 | 3,24 | 1,8000 |
| 4,50 | 3,97 | 1,9925 |
| 5,00 | 4,81 | 2,1932 |

**k=** $a^2 = 0.44^2 =$ **0.193**
**υ**= b/a= 0.021/0.44= **0.047**

**Solución 3: Deduciendo las ecuaciones específicas**

La ecuación que se desea estimar es del tipo:

$$y = k\,(x - \nu\,)^2 = k\,(\,x^2 - 2\nu x + \nu^2\,) = k\,\nu^2 - 2k\,\nu x + k\,x^2$$

la función error que debemos minizar es

$$\begin{aligned} e &= \sum\left(y_i - y(\,x_i\,)\right)^2 = \sum\left(y_i - kx_i^2 + 2k\,\nu\,x_i - k\,\nu^2\right)^2 = \\ &= \sum\left(y_i^2 + k^2\,x_i^4 + 4\,k^2\,\nu^2\,x_i^2 + k^2\,\nu^4 - 2k\,y_i\,x_i^2 + 4k\,\nu\,y_i\,x_i - \right.\\ &\quad\left. - 2k\,\nu^2\,y_i - 4\,k^2\,\nu\,x_i^3 + 2\,k^2\,\nu^2\,x_i^2 - 4\,k^2\,\nu^3\,x_i\right) = \\ &= k^2\left(N\,\nu^4 - 4\,\nu^3\sum x_i + 6\,\nu^2\sum x_i^2 - 4\nu\sum x_i^3 + \sum x_i^4\right) + \\ &\quad + k\left(-2\,\nu^2\sum y_i + 4\nu\sum y_i\,x_i - 2\sum y_i\,x_i^2\right) + \sum y_i^2 \\ &= k^2\left(N\,\nu^4 - a\,\nu^3 + b\,\nu^2 - c\,\nu + d\right) + k\left(-e\,\nu^2 + f\nu - g\right) + h \end{aligned}$$

siendo,

$$a = 4\sum x_i \qquad e = 2\sum y_i$$

$$b = 6\sum x_i^2 \qquad f = 4\sum y_i\,x_i$$

$$c = 4\sum x_i^3 \qquad g = 2\sum y_i\,x_i^2$$

$$d = \sum x_i^4 \qquad h = \sum y_i^2$$

Para que el error sea mínimo se requiere,

$$\frac{\partial e}{\partial k} = 0 = 2k\left(N\,\nu^4 - a\,\nu^3 + b\,\nu^2 - c\,\nu + d\right) + \left(-e\,\nu^2 + f\nu - g\right)$$

$$\frac{\partial e}{\partial \nu} = 0 = k^2\left(4N\,\nu^3 - 3a\,\nu^2 + 2b\,\nu - c\right) + k\left(-2e\,\nu + f\right)$$

Resolviendo en k y υ este sistema de ecuaciones,

$$k = \frac{e\,\nu^2 - f\nu + g}{2(\,\nu^4 - a\,\nu^3 + b\,\nu^2 - c\,\nu + d)} = \frac{2e\,\nu - f}{4\,\nu^3 - 3a\,\nu^2 + 2b\,\nu - c}$$

$$\nu^4\,(ae - 2Nf) + \nu^3\,(af - 2be + 4Ng) + \nu^2\,3(ce - ag) + \nu(2bg - cf - 4de) + (-cg + 2df) = 0$$

Resolviendo numéricamente la ecuación en v, y sustituyendo este valor en una de las expresiones de k, se pueden obtener ambos.

Para los datos del ejemplo: a=110.0 b=577.5 c=1512.5 d=1583.31 e=38.16 f=298.3 g=622.12

$$v_o = 0.1857\,(\,v_i + 0.1238\,)^2$$

**v = 0.1238 k=0.1853**

**Ejemplo 5: Curva característica de un transductor**

El fabricante de la NTC 2322-633 da la siguiente tabla de medida de las resistencias del dispositivo frente a la temperatura en ºC. Sabemos que para este tipo de NTCs la relación entre la resistencia y la temperatura

$$R(T) = R_o \varepsilon^{\frac{T_o}{T}} \qquad (T \text{ en}"K)$$

es del tipo

Estimar los valores de las constantes Ro y To que mejor aproxima a los datos de la tabla.

| T(ºC) | R(Ω) |
|---|---|
| 25 | 220K |
| 40 | 121.3K |
| 60 | 58.71K |
| 80 | 30.41K |
| 100 | 16.72K |
| 120 | 9.663K |
| 140 | 5.851K |
| 160 | 3.691K |
| 180 | 2.415K |
| 200 | 1.632 |
| 220 | 1.132 |
| 240 | 806 |
| 260 | 587 |
| 280 | 437 |
| 300 | 332 |

$$\mathrm{Ln}(R) = \mathrm{Ln}(R_o) + T_o \frac{1}{T}$$

$$y = a\,x + b \quad ==> \left| \begin{array}{l} \mathrm{Ln}(R) -> y \\ \mathrm{Ln}(R_o) -> b \\ T_o -> a \\ \dfrac{1}{T} -> x \end{array} \right.$$

**Solución:**

Se linealiza la relación aplicando logaritmos neperianos a los dos miembros de la ecuación:

por regresión lineal se calcula a y b, y de ellas se obtienen $R_o$ y $T_o$.

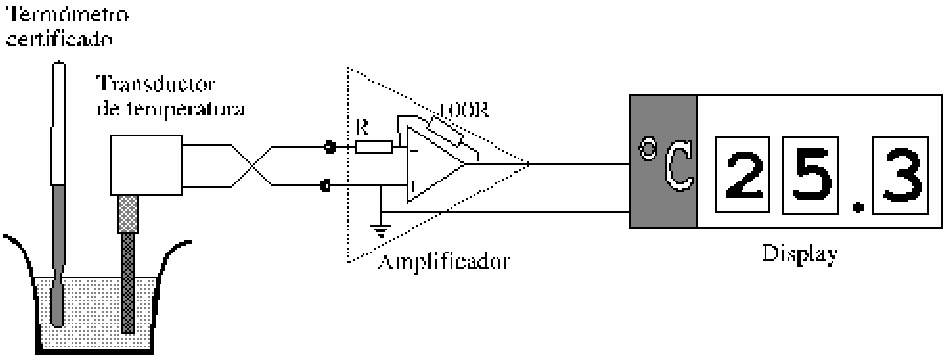
| T (ºC) | T(ºK) | 1/T = x | R(ohm) | Ln(R) = y | | | | R est. | % error |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | 298 | 0,00336 | 220000 | 12,3014 | | | | 243388 | 10,63% |
| 40 | 313 | 0,00319 | 121300 | 11,706 | | | | 126896 | 4,61% |
| 60 | 333 | 0,00300 | 58710 | 10,9804 | **S(x)=** | 0,036072 | | 58338 | 0,63% |
| 80 | 353 | 0,00283 | 30410 | 10,3225 | **S(y)=** | 128,2697 | | 29289 | 3,69% |
| 100 | 373 | 0,00268 | 16720 | 9,7244 | **S(x*y)=** | 0,323517 | | 15832 | 5,31% |
| 120 | 393 | 0,00254 | 9663 | 9,1761 | **S(x^2)=** | 9,05E-05 | | 9111 | 5,71% |
| 140 | 413 | 0,00242 | 5851 | 8,6744 | | | | 5532 | 5,46% |
| 160 | 433 | 0,00231 | 3691 | 8,2137 | **b=Ln(Ro)=** | -1,18779 | | 3517 | 4,72% |
| 180 | 453 | 0,00221 | 2415 | 7,7895 | **a=To=** | **4049,879** | | 2327 | 3,64% |
| 200 | 473 | 0,00211 | 1632 | 7,3976 | | | | 1595 | 2,30% |
| 220 | 493 | 0,00203 | 1132 | 7,0317 | **Ro=** | **0,304896** | | 1127 | 0,48% |
| 240 | 513 | 0,00195 | 806 | 6,6921 | | | | 818 | 1,47% |
| 260 | 533 | 0,00188 | 587 | 6,375 | | | | 608 | 3,61% |
| 280 | 553 | 0,00181 | 437 | 6,0799 | | | | 462 | 5,73% |
| 300 | 573 | 0,00175 | 332 | 5,8051 | | | | 358 | 7,78% |

La relación que resulta es

$$R(T) = 0.3049\ \varepsilon^{\frac{4050}{T(''K)}} \quad (ohm)$$

**Ejemplo 6: Incertidumbre de medida basada en pruebas de calibración.**

Considérese que se ha construido un termómetro electrónico basado en un transductor, un amplificador y un display. El sistema mide temperaturas en el rango 0 y 100 ºC.




Considérese que el sistema se calibra con la ayuda de un termómetro de referencia. Este es un termómetro certificado que para todo su rango de operación presenta una incertidumbre de 0.1 ºC para un nivel de confianza del 95% (k=2).

El proceso de calibración consiste en ajustar la temperatura de la muestra hasta que en el termómetro de referencia se mide la temperatura de ajuste y en esa situación se lee la medida que proporciona el sistema electrónico. Este proceso se repite 8 veces para cada temperatura de ajuste.

Calcular la incertidumbre de medida del sistema para la temperatura de 25 ºC, si las 8 medidas obtenidas en el proceso de calibración son las que se indican en la siguiente tabla.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 24.8 | 24.8 | 25.0 | 25.1 | 25.0 | 25.1 | 25.0 | 25.2 |

**<u>Solución:</u>**

La incertidumbre del equipo resulta de la composición de tres incertidumbres parciales:

$$T_q = T_v + E_T + E_M + E_C$$

$T_q$ = *Resultado de la medida*

$T_v$ = *Temperatura que se mide*

$E_T$ = *Errores en la temperatura de la muestra*

$E_T$ = *Errores en la medida de la muestra*

$E_T$ = *Errores en el display*

a) $U_T$ : Desviación tipica equivalente de los errores de la temperatura que se mide como consecuencia de que el termómetro certificado no es exacto:

$$U_T = \frac{Incertidumbre\ certificada}{k} = \frac{0.1}{2} = 0.05”C$$

b) $U_m$: Acotación superior de la desviación típica de los errores del sistema de medida, obtenida a partir de la dispersión de los valores que resultan de la medida:

$$\overline{T_m} = \frac{1}{8}\left[24.8 + 24.8 + 25.0 + 25.1 + 25.0 + 25.1 + 25.0 + 25.2\right] = 25.0\,”C$$

$$s^2 = \frac{1}{(n-1)}\Sigma\left(\overline{T_m} - T_{mi}\right)^2 = \frac{1}{8\,7}\left((25.0 - 24.8\,)^2 + (25.0 - 24.8\,)^2 + ...\right)^2 =$$

$$= 0.02$$

$$U_m = w\,s' = 1.2\,\sqrt{0.02} = 0.14\,^{\circ}C$$

c) $U_d$ :Componente de incertidumbre debida a la resolución del display:

$$U_d = \frac{Resoluci\,n}{\sqrt{3}} = \frac{0.1}{2\,\sqrt{3}} = 0.03^{\circ}\,C$$

La desviación standard equivalente global de la medida es

$$U = \sqrt{U_T^2 + U_m^2 + U_d^2} = 0.18\,^{\circ}C$$

La incertidumbre en la medida para un nivel de confianza de 95% (k=2) es,

$$\mathrm{I = k\,U = 2 * 0.18 = 0.36\,^{\circ}C}$$

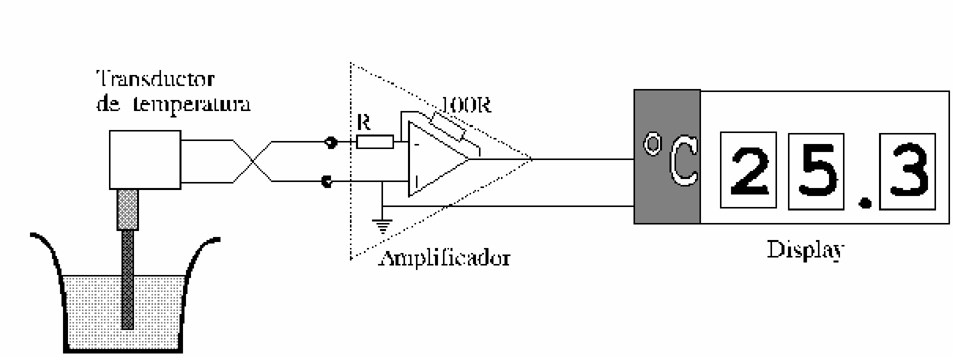
Por ejemplo, esta incertidumbre significa que si al hacer una medida de temperatura con el equipo mido 26.2 ºC, tengo un certidumbre del 95% de que el valor verdadero se encuentra entre

$$26.2 - 0.36 = 25.84\,^{\circ}C \;<\; T_{verdadera} \;<\; 26.56\,^{\circ}C = 26.2 + 0.36$$

(Se ha considerado que la medida se obtiene como resultado de promediar 8 medidas individuales.)

**Ejemplo 7: Incertidumbre de medida basada en las características del sistema.**

Considérese que se ha construido un termómetro electrónico basado en un transductor, un amplificador y un display. El sistema mide temperaturas en el rango 0 y 100 ºC.




La información de que se dispone relativa a la precisión de los componentes con que está construido es:

**Transductor:** Presenta para todo el rango de operación un error máximo en unidades de entrada de 0.05 ºC.

**Amplificador:** Está construido con un amplificador operacional que se puede considerar ideal y resistencias con un 2% de precisión.

**Display:** presenta hasta décimas de ºC.

Estímese en función de estos datos la incertidumbre de medida del termómetro problema.

**Solución**

En este caso el valor medido depende de la sensibilidad del transductor y de la ganancia del amplificador

$$T_m = S_T\, G_A\, T_v + E_D \qquad \left|\; \begin{array}{l} T_m = Temp.\, medida \\ T_v = Temp.\, verdad \\ S_T = Sens.\, Transductor \\ G_A = Ganancia\ Ampl. \\ E_D = Errorendisplay \end{array}\right.$$

Con el equipo equilibrado, se cumple: $\mathbf{S_T\, G_A \approx 1}$.

La incertidumbre del equipo se debe a tres componentes:

a) $U_T$ : Incertibumbre en la sensibilidad del transductor:

$$U_S = \frac{S_T}{T}\,\frac{M\ ximo\ error\ Temp.}{\sqrt{3}} = \frac{S_T}{25^o}\,\frac{0.02}{\sqrt{3}} = S_T\, 0.46\ 10^{-3}$$

b) $U_G$ : Incertidumbre en la ganancia del amplificador:

$$G_A = -\frac{R_2}{R_1} \quad \left| \begin{array}{l} R_2 = 100R \\ R_1 = R \\ G_A = -100 \end{array} \right.$$

$$U_R1 = \frac{M\ ximoerrorenR1}{\sqrt{3}} = \frac{0.02\,R_1}{\sqrt{3}} = 0.012\,R_1$$

$$U_R2 = \frac{M\ ximoerrorenR2}{\sqrt{3}} = \frac{0.02\,R_2}{\sqrt{3}} = 0.012\,R_2$$

$$U_G^2 = \lambda_R 1^2 U_R 1^2 + \lambda_R 2^2 U_R 2^2 \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_R 1 = \dfrac{\partial G_A}{\partial R_1} = \dfrac{R_2}{R_1^2} \\ \lambda_R 2 = \dfrac{\partial G_A}{\partial R_2} = \dfrac{-1}{R_1} \end{array} \right.$$

$$U_G = \sqrt{\left[\frac{R_2}{R_1}\,0.012 \quad R_1\right]^2 + \left[\frac{1}{R_1}\,0.012 \quad R_2\right]^2} =$$

$$= G_A \sqrt{0.012^2 + 0.012^2} = G_A\, 0.017$$

c) $U_d$ : Incertidumbre por resolución del display:

$$U_D = \frac{Resoluci\ n}{\sqrt{3}} = \frac{0.05}{\sqrt{3}} = 0.029\ ^{o}C$$

La componente de incertidumbre total de la medida es:

$$U^2 = \lambda_S^2 U_S^2 + \lambda_G^2 U_G^2 + U_D^2 \quad \left| \begin{array}{l} \lambda_S = G_A T_v = \dfrac{T_v}{S_T} \\ \lambda_G = S_T T_v = \dfrac{T_v}{G_A} \end{array} \right.$$

$$U = \sqrt{(25\ ^{o}\ 0.46 \quad 10^{-3})^2 + (25\ ^{o}\ 0.017 \quad)^2 + 0.029^2} = 0.43\ ^{o}C$$

La incertidumbre de la medida para un nivel de confianza del 95% (k=2) es,

$$I = k\,U = 2 * 0.43 = 0.86\ ^{o}C$$

***Nota:*** *No todas las incertidumbres de los elementos son debidas a errores aleatorios. Por ejemplo la incertidumbre del display es realmente aleatoria, en cada medida del equipo el resultado se redondea introduciendo el error. Sin embargo, las resistencias tienen un error pero no es aleatorio, una vez cogida una resistencia e introducida en el circuito su valor permanece constante y dará lugar a un error sistemático y no aleatorio. Su efecto podría eliminarse mediante calibración.*

*Por ello, la incertidumbre calculada corresponde al caso de que se hiciera la misma medida con N equipos distintos, y compararámos los resultados entre ellas.*